

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

74. BAND, 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 8. NOVEMBER 1960)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1960

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweide 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

74. Band

Inhalt

5. (Schluß-)Heft Seite

Albrecht, R., und G. Karrer, Fixpunktsätze in uniformen Räumen	387
Itô, N., Faktorisierung endlicher auflösbarer Gruppen	392
Bergau, P., und J. Mennicke, Über topologische Abbildungen der Brezelfläche vom Geschlecht 2	414
Schäfke, F. W., Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. I	436

Fixpunktsätze in uniformen Räumen

Herrn JOSEF LENSE zum 70. Geburtstag am 28. Oktober 1960 gewidmet

Von

RUDOLF ALBRECHT und GUIDO KARRER

Die vorliegende Arbeit schließt an Untersuchungen von L. KANTOROVITCH [1], J. WEISSINGER [2] und J. SCHRÖDER [3] an und gibt eine abstrakte Verallgemeinerung gewisser Fixpunktsätze über kontrahierende Abbildungen im Rahmen der Theorie der uniformen Räume. An Stelle der in [3] angegebenen Definition „verallgemeinerter Abstände“ wird eine andere eingeführt, die Räume mit einem solchen Abstandsbegriff als Spezialfälle von uniformen Räumen ausweist.

1. Hilfssätze

Sei E ein topologischer Raum, f eine Abbildung von E in E . Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine (eigentliche) Filterbasis auf E (bezüglich der Ordnung $\leq$, die durch die mengentheoretische Inklusion $\subseteq$ gegeben ist) und es sei für eine beliebige Filterbasis $\mathfrak{C}$ auf E mit $\text{Fi } \mathfrak{C}$ der durch $\mathfrak{C}$ erzeugte Filter, mit $L_{\mathfrak{C}}$ die Menge der Limes von $\mathfrak{C}$, mit $A_{\mathfrak{C}}$ die Menge der Berührungspunkte von $\mathfrak{C}$ bezeichnet. Schließlich soll für beliebiges $x \in E$ der Umgebungsfiler von x mit $\mathfrak{U}_x$ bezeichnet werden. Wir nehmen an, daß $L_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset$ ist.

LEMMA 1. Ist f stetig auf $L_{\mathfrak{B}}$ und $\text{Fi } \mathfrak{B}$ feiner als $\text{Fi } f(\mathfrak{B})$, dann ist $f(L_{\mathfrak{B}}) \subseteq L_{\mathfrak{B}}$.

BEWEIS. f stetig auf $L_{\mathfrak{B}}$ heißt: Für beliebiges $x \in L_{\mathfrak{B}}$ ist $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{U}_x)$. Da x Limes von $\mathfrak{B}$ ist, gilt $\mathfrak{U}_x \subseteq \text{Fi } \mathfrak{B}$. Deshalb ist $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{U}_x) \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{B})$. Damit hat man, weil $f(x)$ Limes von $\mathfrak{U}_{f(x)}$ ist, $f(x) \in L_{f(\mathfrak{B})}$ für jedes $x \in L_{\mathfrak{B}}$. Also gilt

$$(1.1) \quad f(L_{\mathfrak{B}}) \subseteq L_{f(\mathfrak{B})}.$$

Nun ist $\text{Fi } f(\mathfrak{B}) \subseteq \text{Fi } \mathfrak{B}$, also auch $L_{f(\mathfrak{B})} \subseteq L_{\mathfrak{B}}$. Mit (1.1) folgt daher $f(L_{\mathfrak{B}}) \subseteq L_{\mathfrak{B}}$.

LEMMA 2. Ist f stetig auf $A_{\mathfrak{B}}$ und $\text{Fi } \mathfrak{B}$ gröber als $\text{Fi } f(\mathfrak{B})$, dann ist $f(A_{\mathfrak{B}}) \subseteq A_{\mathfrak{B}}$.

BEWEIS. f stetig auf $A_{\mathfrak{B}}$ heißt: Für beliebiges $x \in A_{\mathfrak{B}}$ ist $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{U}_x)$. Sei $x \in A_{\mathfrak{B}}$. Dann existiert ein Filter $\mathfrak{F}$, so daß $\text{Fi } \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{U}_x \subseteq \mathfrak{F}$ [4, Chap. I, p. 49]. Deshalb ist $\text{Fi } f(\mathfrak{B}) \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{F})$ und $\text{Fi } (\mathfrak{U}_x) \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{F})$. Mit Obigem gilt $\mathfrak{U}_{f(x)} \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{F})$. Es folgt $L_{f(\mathfrak{F})} \subseteq A_{f(\mathfrak{F})} \subseteq A_{f(\mathfrak{B})}$ und $f(x) \in A_{f(\mathfrak{B})}$ für jedes $x \in A_{\mathfrak{B}}$. Also ist

$$(1.2) \quad f(A_{\mathfrak{B}}) \subseteq A_{f(\mathfrak{B})}.$$

Nun gilt $\text{Fi } \mathfrak{B} \subseteq \text{Fi } f(\mathfrak{B})$, also ist $A_{f(\mathfrak{B})} \subseteq A_{\mathfrak{B}}$. Mit (1.2) folgt deshalb $f(A_{\mathfrak{B}}) \subseteq A_{\mathfrak{B}}$.

BEMERKUNGEN. 1. Ist E separiert, dann ist $L_{\mathfrak{B}} = A_{\mathfrak{B}} = \{x\}$ [4, Chap. I, p. 49]. Ist also $\mathfrak{B}$ mit $f(\mathfrak{B})$ vergleichbar, dann ist $x = f(x)$. 2. Ist E ein uniformer Raum, dann ist $L_{\mathfrak{B}} = A_{\mathfrak{B}}$ [4, Chap. II, p. 146, 148].

2. Fixpunktsätze für Abbildungen eines uniformen Raumes in sich

Sei E eine Menge, $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis auf $E \times E$, die ein Fundamentalsystem von Umgebungen einer uniformen Struktur auf E ist. Wir betrachten den hierdurch gegebenen uniformen Raum und bezeichnen ihn wieder mit E .

SATZ 1. Sei f eine Abbildung von E in E ; $M \subseteq E$, $M \neq \emptyset$; $M_n = \bigcup_{l \geq n} f^l(M)$,

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $n \in N$; ferner sei X die Menge der Limes von $\{M_n\}_{n \in N}$ und f stetig auf X . Dann gilt (a) $f(X) \subseteq X$; (b) falls E separiert ist, $f(X) = X$ und X enthält höchstens ein Element.

BEWEIS. $\{M_n\}_{n \in N}$ ist eine Basis des Elementarfilters von $\{f^n(M)\}_{n \in N}$. Ist $X = \emptyset$, dann ist $f(X) = X$. Sei $X \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung ist f stetig auf X . Ferner ist $\text{Fi}\{M_n\}_{n \in N}$ ebenso fein wie $\text{Fi}\{f^n(M)\}_{n \in N}$, denn $f(\{M_n\}_{n \in N}) = \{M_{n+1}\}_{n \in N}$. Also ist nach Lemma 1 $f(X) \subseteq X$. (b) ist trivial.

BEMERKUNG. Statt Lemma 1 kann auch Lemma 2 zum Beweise benützt werden.

SATZ 2. Sei E separiert und f eine Abbildung von E in E . Für jede Wahl von $B \in \mathfrak{B}$, $y \in E$, $z \in E$ existiere ein $n \in N$, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\} \times \{f^n(y), f^n(z)\} \subseteq B$. Dann hat f auf E höchstens einen Fixpunkt.

BEWEIS. Sei $y = f(y)$, $z = f(z)$, $y \neq z$. Dann existiert ein $B \in \mathfrak{B}$, so daß $(y, z) \notin B$, da E separiert. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß es ein n gibt, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\} \times \{f^n(y), f^n(z)\} \subseteq B$ ist, weil dann $(y, z) \in B$ wäre.

SATZ 3. Sei E separiert und vollständig, f eine Abbildung von E in E . Für jede Wahl von $B \in \mathfrak{B}$ und für ein $z \in E$ existiere ein $n \in N$, so daß $\{f^n(y), f^n(z)\} \times \{f^n(y), f^n(z)\} \subseteq B$ für beliebiges $y \in E$ gilt. Dann existiert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)$. Ist f stetig im Punkte x , so ist $x = f(x)$.

BEWEIS. $\left\{ \bigcup_{l \geq n} f^l(z) \right\}_{n \in N}$ ist Basis eines Cauchy-Filters. Denn sei B' ein

beliebiges Element von $\mathfrak{B}$ und $B \circ B \subseteq B'$. Dann ist für beliebiges ganzzahliges $\varrho \geq 0$ $\{f^{n+\varrho}(z), f^n(z)\} \times \{f^{n+\varrho}(z), f^n(z)\} \subseteq B$. Folglich ist für beliebige ganzzahlige $\varrho \geq 0$ und $\sigma \geq 0$ $(f^{n+\varrho}(z), f^n(z)) \in B$ und $(f^n(z), f^{n+\sigma}(z)) \in B$, also $(f^{n+\varrho}(z), f^{n+\sigma}(z)) \in B'$. Damit gilt $\bigcup_{l \geq n} f^l(z) \times \bigcup_{l \geq n} f^l(z) \subseteq B'$. Wegen der Voll-

ständigkeit von E ist $\left\{ \bigcup_{l \geq n} f^l(z) \right\}_{n \in N}$ konvergent. Da E separiert ist, existiert

nur ein Limes. Für diesen schreiben wir $x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)$. Ist f stetig im Punkte x , so ist $x = f(x)$ nach Satz 1.

3. Erzeugung einer uniformen Struktur mittels verallgemeinerter Abstände

In Anwendungen werden uniforme Strukturen mittels des gewöhnlichen oder eines „verallgemeinerten“ Abstandsbegriffes erzeugt. Sei H eine Menge $\{\varrho, \sigma, \tau, \dots\}$ von Elementen $\varrho, \sigma, \tau, \dots$. Auf H sei ein assoziatives, kommutatives inneres Kompositionsgesetz $(\varrho, \sigma) \rightarrow \varrho + \sigma$ erklärt für beliebiges $\varrho \in H$, $\sigma \in H$. In H existiere ein neutrales Element o . Ferner sei H geordnet durch

eine Relation $\leq^1$). Schließlich gelte

H1: o sei kleinstes Element von H , $H' = H - \{o\}$ sei links filternd;

H2: zu beliebigem $\varrho \in H'$ existiere $\varrho' \in H'$, so daß $2\varrho' \leq \varrho$;

H3: für beliebige Elemente ϱ, σ, τ aus H folge aus $\varrho \leq \sigma$ daß $\varrho + \tau \leq \sigma + \tau$ ist.

Aus H3 folgt: Ist $\mu \leq \sigma$, $\varrho \leq \tau$ dann ist $\mu + \varrho \leq \sigma + \tau$. Aus H2 und H3 folgt $\varrho' \leq 2\varrho' \leq \varrho$.

Sei E eine Menge $\{x, y, z, \dots\}$ von Elementen $x, y, z, \dots$ und d eine Abbildung von $E \times E$ in H , so daß für beliebige Elemente x, y, z aus E gilt

D1: $d(x, x) = o$;

D2: $d(x, y) = d(y, x)$;

D3: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Wir setzen für beliebiges $\varrho \in H'$ $B_\varrho = \overline{d}^{-1}(\{\sigma \mid \sigma \in H, \sigma \leq \varrho\})$. Dann ist $\{B_\varrho\}_{\varrho \in H'}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen einer uniformen Struktur auf E .

Beweis. Für beliebiges $\varrho \in H'$ ist $\Delta \subseteq B_\varrho$ wegen D1. Aus H1 folgt, daß es zu beliebigem $\varrho \in H'$, $\varrho' \in H'$ ein $\varrho'' \in H'$ gibt, so daß $\varrho'' \leq \varrho$ und $\varrho'' \leq \varrho'$. Ferner gilt: Ist $\sigma \leq \tau$, $\sigma \in H'$, so ist $B_\sigma \subseteq B_\tau$. Somit ist $\{B_\varrho\}_{\varrho \in H'}$ eine Filterbasis. Wegen D2 ist $B_\varrho = \overline{B}_\varrho$. Sei schließlich ϱ ein beliebiges Element aus H' . Nach H2 existiert $\varrho' \in H'$, so daß $2\varrho' \leq \varrho$, und nach H3 ist $\varrho' \leq \varrho$. Infolge D3 ist $\overline{B}_{\varrho'} \subseteq B_{2\varrho'} \subseteq B_\varrho$.

Sei f eine Abbildung von E in E und $z \in E$. Wir betrachten die Filterbasis $\left\{ \bigcup_{\substack{l \in N \\ l \geq n}} f^l(z) \right\}_{n \in N}$ und setzen $z_l = f^l(z)$, $l \in N$. Diese Filterbasis ist nur dann konvergent, falls sie „beliebig kleine“ Mengen enthält, das heißt, zu beliebig gewähltem $\varrho \in H'$ existiert $n \in N$, so daß

$$(3.1) \quad d(z_k, z_l) \leq \varrho \quad \text{ist für beliebiges } k \geq n \text{ und } l \geq n.$$

(3.1) ist erfüllt, falls

$$(3.2) \quad \sum_{i=k}^m d(z_{i+1}, z_i) \leq \varrho \quad \text{ist für beliebiges } m \text{ und } k, m \geq k \geq n.$$

Denn sei in (3.1) $l = k + r$, $r > 0$. Dann ist $d(z_k, z_{k+r}) \leq d(z_k, z_{k+1}) + d(z_{k+1}, z_{k+r})$ infolge D3. Wegen H3 erhält man unter Berücksichtigung von (3.2)

$$d(z_k, z_{k+r}) \leq \sum_{i=k}^{k+r-1} d(z_i, z_{i+1}) \leq \varrho.$$

4. Majorantenmethode. Fehlerabschätzung

Wir nehmen nun an, daß jedes Element von H regulär sei. Dann besitzt H eine Symmetrisierung $\bar{H} = \{\varrho, \sigma, \tau, \dots; -\varrho, -\sigma, -\tau, \dots\}$. $\bar{H}$ ist eine Gruppe. Mittels der Ordnung auf H wird in natürlicher Weise eine Ordnung

¹⁾ H braucht nicht vollständig geordnet zu sein.

auf $\bar{H}$ erhalten, indem wir dann und nur dann $-\sigma \leq -\rho$ setzen, wenn $\rho \leq \sigma$, $\rho \in H$, $\sigma \in H$ ist und Transitivität verlangen. Ferner gelte

$\bar{H}3$: Für beliebige Elemente ρ, σ, τ aus $\bar{H}$ folge aus $\rho \leq \sigma$, daß $\rho + \tau \leq \sigma + \tau$ ist.

Daraus folgt: Ist $\sigma + \tau = \rho$, $\rho \leq \sigma$, dann ist $\tau \leq \rho$. Ist $\sigma = 2\sigma$, dann ist $\sigma = o$. Ist $\mu \leq \sigma$, $\rho \leq \tau$, dann ist $\mu + \rho \leq \sigma + \tau$.

Auf $\bar{H}$ sei ein äußeres Kompositionsgesetz $(M, \rho) \rightarrow M\rho$, $M\rho \in \bar{H}$, mit dem Operatorenbereich $\Omega = \{M, N, \dots\}$ erklärt. Innere Kompositionsgesetze auf Ω seien durch $(M+N)\rho = M\rho + N\rho$, $(MN)\rho = M(N\rho)$ gegeben für beliebiges $M \in \Omega$, $N \in \Omega$, und $\rho \in \bar{H}$. Für die Operatoren aus Ω gelte ferner für beliebiges $M \in \Omega$, $\sigma \in \bar{H}$, $\rho \in \bar{H}$

Ω_1 : falls $o \leq \rho$, dann sei $o \leq M\rho$,

Ω_2 : falls $\sigma \leq \rho$, dann sei $M\sigma \leq M\rho$.

Sind die Operatoren aus Ω additiv, so ist $Mo = o$ und Ω_1 folgt aus Ω_2 . Ferner ist dann $M(-\rho) = -M\rho$.

Sei f eine Abbildung von E in E und $E' \subseteq E$. Für ein $n \in N$ existiere ein $M \in \Omega$, so daß für beliebiges $x \in E'$ und für beliebiges $y \in E'$ $d(f^n(x), f^n(y)) \leq M d(x, y)$ ist. Dann sagen wir, „ f^n ist auf E' M -beschränkt“. Für $z \in E$ setzen wir ferner $z_i = f^i(z)$, $i \in N$. Es gelten dann folgende hinreichende Kriterien für die Gültigkeit von (3.1):

1. Für ein $z \in E$ und jedes $n \in N$ sei f^n auf $\{z, z_1, z_2, z_3, \dots\}$ M_n -beschränkt. Existiert für beliebiges festes $\rho' \in H'$ ein $n \in N$, so daß $M_n d(z, z_r) \leq \rho'$ ist für beliebiges $r > 0$, so gilt (3.1).

BEWEIS. Zu beliebigem $\rho \in H'$ existiert $\rho' \in H'$, so daß $2\rho' \leq \rho$ ist. Ferner gilt $d(z_n, z_{n+r}) \leq M_n d(z, z_r) \leq \rho'$. Für $k \geq n$ und $l \geq n$ ist dann $d(z_k, z_l) \leq d(z_k, z_n) + d(z_n, z_l) \leq 2\rho' \leq \rho$.

2. Sei f auf den Mengen $\{z_{i+1}, z_i\}$, $i \in N$, M -beschränkt. Für beliebiges $\rho \in H'$ existiere ein $n \in N$, so daß für jedes $r \geq 0$ $\sum_{j=0}^r M^j d(z_{n+1}, z_n) \leq \rho$ ist, wobei M^0 den Identitätsoperator bedeute. Dann gilt (3.2) und damit (3.1).

BEWEIS. $\sum_{i=k}^m d(z_{i+1}, z_i) \leq \sum_{i=n}^m d(z_{i+1}, z_i) \leq \sum_{j=0}^{m-n} M^j d(z_{n+1}, z_n) \leq \rho$.

Ferner gelten folgende Fehlerabschätzungen:

1. Sei $x = f(x)$, $z \in E$ und f^n auf $\{x, z\}$ M_n -beschränkt für jedes $n \in N$. Dann ist $d(x, z_n) \leq M_n d(x, z)$ eine Abschätzung des Abstandes der n -ten Iterierten $f^n(z)$ vom Punkte x . Abschätzungen dieser Art dienen in der Praxis zur Kennzeichnung des Konvergenzverhaltens (z. B. lineare Konvergenz, quadratische Konvergenz).

2. Sei $k \in N$ eine feste Zahl, $m > n > k$, f^l auf $\{z_{k+1}, z_k\}$ M_l -beschränkt für jedes $l \geq n - k$ und x Limes der Filterbasis $\left\{ \bigcup_{\substack{i \in N \\ i \geq n}} f^i(z) \right\}_{n \in N}$. Dann ist $d(x, z_n) \leq d(x, z_m) + \sum_{l=n-k}^{m-k-1} M_l d(z_{k+1}, z_k)$.

BEWEIS.

$$d(x, z_n) \leq d(x, z_m) + d(z_m, z_n) \quad \text{und} \quad d(z_m, z_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(z_{i+1}, z_i) \leq \sum_{l=n-k}^{m-k-1} M_l d(z_{k+1}, z_k).$$

Abschätzungen dieser Art werden in der Praxis häufig benützt, falls z.B. H das Intervall $[0, \infty)$, E ein metrischer Raum, Ω eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen ist, $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x, z_m) = 0$ ist und die Reihe $\sum_{l=n-k}^{\infty} M_l$ konvergiert.

Auf der Majorantenmethode beruht

SATZ 4. Sei f eine Abbildung von E in E und f^l auf E M_l -beschränkt für jedes $l \in N$. Es existiere ein Operator $M \in \Omega$ und zu beliebigen gewählten $\varrho \in H'$, $y \in E$, $z \in E$ ein $s \in N$, so daß für jedes $m \geq s$ $0 \leq M d(y, z) - \sum_{l=1}^m M_l d(y, z) \leq \varrho$ ist. Dann ist $\{\bigcup_{l \geq j} f^l(z)\}_{j \in N}$ Basis eines Cauchy-Filters und

$$\{f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)\} \times \{f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)\} \subseteq B_{2\varrho}.$$

BEWEIS. $\{\bigcup_{l \geq j} f^l(z)\}_{j \in N}$ ist genau dann Basis eines Cauchy-Filters, wenn (3.4) gilt. Sei ϱ^* ein beliebiges Element aus H' , $2\varrho \leq \varrho^*$, $2\varrho' \leq \varrho$ nach H 2, und $r \in N$. Wir nehmen das zu ϱ' , z_{r+1} , z_r gehörige $s \in N$. Es ist $d(z_{j+1}, z_j) \leq M_{j-r} d(z_{r+1}, z_r)$ für $j > r$. Aus D 3 folgt $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+1}) \leq \sum_{j=s+r+1}^{s+r+k} d(z_{j+1}, z_j) \leq \sum_{j=s+1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r)$ für beliebiges $k > 0$. Ferner gilt $M d(z_{r+1}, z_r) - \sum_{j=1}^s M_j d(z_{r+1}, z_r) \leq \varrho'$ und $-M d(z_{r+1}, z_r) + \sum_{j=1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r) \leq \varrho'$, also nach H 3 $\sum_{j=s+1}^{s+k} M_j d(z_{r+1}, z_r) \leq 2\varrho'$. Daraus folgt $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+1}) \leq 2\varrho' \leq \varrho$. Ebenso gilt dann für beliebiges $l > 0$ $d(z_{s+r+l+1}, z_{s+r+1+l}) \leq 2\varrho' \leq \varrho$. Damit folgt aus D 3 $d(z_{s+r+k+1}, z_{s+r+1+l+1}) \leq 2\varrho \leq \varrho^*$. Somit gilt (3.1) mit $n = s + r + 2$. — Schließlich ist $M_{s+1} d(y, z) \leq 2\varrho$, also $d(f^{s+1}(y), f^{s+1}(z)) \leq M_{s+1} d(y, z) \leq 2\varrho$.

Ist H das Intervall $[0, \infty)$, E ein vollständiger, metrischer Raum, Ω eine Menge von nichtnegativen reellen Zahlen, so ergibt Satz 4 mit den Sätzen 1 und 2 einen Existenz- und Eindeigkeitssatz für Fixpunkte, der anscheinend erstmals von J. WEISSINGER [2] formuliert wurde. Die in Satz 4 geforderte Stetigkeit folgt dabei aus der Dehnungsbeschränktheit.

Literatur

- [1] KANTOROVITCH, L.: The method of successive approximation for functional equations. Acta Mathematica Uppsala **71**, 63–97 (1939).
- [2] WEISSINGER, J.: Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math. Nachr. **8**, 193–212 (1952).
- [3] SCHRÖDER, J.: Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. Math. Z. **66**, 111–116 (1956).
- [4] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Deuxième édition. Paris 1951.

München, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

Ann Arbor, University of Michigan, Dept. of Mathematics

(Eingegangen am 5. März 1960)

Faktorisierung endlicher auflösbarer Gruppen

Von

NOBORU ITÔ

ÜBERSICHT. Es sei $\mathcal{G}$ eine auflösbare Gruppe endlicher Ordnung und $\mathcal{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathcal{G}$, die keinen vom neutralen Element $\mathcal{E}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathcal{G}$ enthält. Dann enthält $\mathcal{G}$ einen kleinsten Normalteiler $\mathcal{N}$, der eine elementar abelsche p -Gruppe (p : Primzahl) ist, und $\mathcal{G}$ erlaubt die Faktorisierung $\mathcal{G} = \mathcal{N}\mathcal{M}$ mit $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \mathcal{E}$. Nun sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathcal{G}$, welche (wie $\mathcal{N}$) ein Komplement von $\mathcal{M}$ ist: $\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{M}$ mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{M} = \mathcal{E}$. Über die Struktur solcher $\mathcal{A}$ hat RITT [8] früher bewiesen: wenn $\mathcal{A}$ zyklisch ist, so ist entweder $\mathcal{A} = \mathcal{N}$ (und die Ordnung von $\mathcal{A}$ ist gleich p) oder die Ordnung von $\mathcal{A}$ ist 4. Neuerdings haben HUPPERT [6] und der Verfasser [7] das Resultat von RITT wesentlich verbessert. Nun ist das Ziel dieser Arbeit der für $p > 3$ endgültige

SATZ 1. Für $p > 3$ ist $\mathcal{N}$ das einzige abelsche Komplement von $\mathcal{M}$.

Der Beweis von Satz 1 beruht auf dem folgenden

SATZ 2. Voraussetzungen. $\mathcal{G}$ sei eine endliche Gruppe mit folgenden Eigenschaften: a) $\mathcal{G}$ enthält einen elementar abelschen p -Normalteiler $\mathcal{N}$, dessen Zentralisator in $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{N}$ übereinstimmt. Dabei ist p eine Primzahl größer als 3. b) $\mathcal{G}$ enthält eine nilpotente Untergruppe $\mathcal{R}$ mit zu p primärer Ordnung, deren Zentralisator in $\mathcal{G}$ in $\mathcal{N}\mathcal{R}$ enthalten ist, und $\mathcal{N}\mathcal{R}$ ist ein Normalteiler von $\mathcal{G}$. c) $\mathcal{G}$ enthält eine abelsche Untergruppe $\mathcal{U}$, die im Normalisator von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{G}$ enthalten ist. d) $\mathcal{G}$ erlaubt die Faktorisierung $\mathcal{G} = \mathcal{N}\mathcal{R}\mathcal{U}$ derart, daß die Ordnung von $\mathcal{G}$ dem Produkt von denjenigen von $\mathcal{N}$, $\mathcal{R}$ und $\mathcal{U}$ gleich ist.

Behauptung. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche p -Untergruppe von $\mathcal{G}$ mit der Eigenschaft: $\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{R}\mathcal{U}$ und $\mathcal{N}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{N}\mathcal{U}$, so gilt $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ und daher $\mathcal{A} = \mathcal{N}$.

BEZEICHNUNGEN. $|\mathcal{G}|$: die Ordnung von $\mathcal{G}$; $\mathcal{G} \triangleright \mathcal{H}$: $\mathcal{H}$ ist ein Normalteiler von $\mathcal{G}$; $\mathcal{H}$ sei eine Untergruppe von $\mathcal{G}$; $\mathcal{N}\mathcal{H}$: der Normalisator von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{G}$; $\mathcal{Z}\mathcal{H}$: der Zentralisator von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{G}$; $\mathcal{C}\mathcal{G}$: das Zentrum von $\mathcal{G}$; $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ seien Untermengen von $\mathcal{G}$. $[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$: durch $H^{-1}K^{-1}HK$ ($H \in \mathcal{H}$, $K \in \mathcal{K}$) erzeugte Untergruppe von $\mathcal{G}$; $\langle \mathcal{H} \rangle$: durch $\mathcal{H}$ erzeugte Untergruppe von $\mathcal{G}$; sei q eine Primzahl. $\mathcal{G}(q)$: eine q -Sylowgruppe von $\mathcal{G}$; $GL(m, p)$: die m -dimensionale allgemeine lineare Gruppe über $GF(p)$; $SL(m, p)$: die m -dimensionale spezielle lineare Gruppe über $GF(p)$.

§ 1. Beweis von Satz 2

Der Beweis wird durch Induktion nach $|\mathcal{G}|$ geführt.

a) Angenommen, $\mathcal{N}$ sei nicht minimal. Sei $(\mathcal{E} <) \mathcal{Q} (< \mathcal{N})$ ein maximaler Normalteiler von $\mathcal{G}$ in $\mathcal{N}$. Setze $\mathcal{Z}/\mathcal{Q} = \mathcal{Z}(\mathcal{N}/\mathcal{Q})$. Wegen $\mathcal{Z} \geq \mathcal{N}$ ist $\mathcal{Z} = \mathcal{N}(\mathcal{N}\mathcal{U})$

$\cap \mathfrak{Z}$). Da $\mathfrak{N}$ das einzige p -Sylowkomplement von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist, ist $\mathfrak{C} = (\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}) \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N}$ das einzige p -Sylowkomplement von $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}$. Wegen $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{B} = (\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}) \cap \mathfrak{U}$ eine p -Sylowgruppe von $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}$. Somit haben wir insgesamt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{C} \cap \mathfrak{U}$. Nun folgt daraus $\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ und wegen $[\mathfrak{N}, \mathfrak{C}\mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}$ dann $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Daher haben wir $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$.

b) Wir zeigen, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ alle Bedingungen von Satz 2 erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B})/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B})/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{U}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B})/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Es genügt zu zeigen

$$(1) \quad \mathbf{Z}(\mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = \mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$$

und

$$(2) \quad \mathbf{Z}(\mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}) \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}.$$

Denn dann sind a) und b) erfüllt; c) folgt so: Wegen $\mathfrak{Q}\mathfrak{C} \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{U} \leq \mathfrak{N}(\mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B})$. d) überträgt sich trivial.

Beweis von (1): Setze $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathbf{Z}(\mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B})$. Sei $X \in \mathfrak{Z}'$, also $[X, \mathfrak{N}] \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$ folgt $[X, \mathfrak{N}] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{Q}$. Somit ist $X \in \mathfrak{Z}$ und wir haben $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Beweis von (2): Setze $\mathfrak{Z}^*/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathbf{Z}(\mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B})$. Angenommen, daß $\mathfrak{Z}^* \not\leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{B}$ ist. Dann existiert ein $NRU \in \mathfrak{Z}^*$ mit $N \in \mathfrak{N}$, $R \in \mathfrak{N}$ und $U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{B}$. Dann gilt $[NRU, \mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Für jedes $X \in \mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}$ gilt $[NRU, X] = (RU)^{-1}[N, X]RU[RU, X] \in \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Wegen $[RU, X] \in \mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}$ folgt $(RU)^{-1}[N, X]RU \in \mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$. Also haben wir $[RU, X] \in \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, $[RU, \mathfrak{Q}\mathfrak{N}\mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ und daher $RU \in \mathfrak{Z}^*$. Wegen $[RU, \mathfrak{N}\mathfrak{B}] \leq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ folgt $[RU, \mathfrak{N}\mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Wegen $U \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ gilt $[RU, \mathfrak{N}] \leq \mathfrak{N}$ und also $[RU, \mathfrak{N}] \leq \mathfrak{C}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{C}$. Insbesondere ist nun $[RU, R] = [U, R] \in \mathfrak{C} \leq \mathfrak{Z}^*$ und daher $U \in \langle RU \rangle \mathfrak{C} \leq \mathfrak{Z}^*$. Denn für $m \equiv 1 \pmod{|\mathfrak{U}|}$, $m \equiv 0 \pmod{|\mathfrak{N}|}$ gilt $(RU)^m \equiv R^m U^m = U \pmod{\mathfrak{C}}$. Setze nun $\mathfrak{Z}^* \cap \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{U}$. Dann ist wegen $U \in \mathfrak{B} - \mathfrak{B}$

$$(*) \quad \mathfrak{B} < \mathfrak{B} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}^*.$$

Setze $\mathfrak{Z}''/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = \mathbf{Z}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B})$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist $\mathfrak{Z}'' \geq \mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{Z}^*$ gilt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, daher ist $\mathfrak{Z}'' \geq \mathfrak{N}$. Also haben wir $\mathfrak{Z}'' = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}'')\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}'' \triangleleft \mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{N}$ abelsch ist). Betrachte die p -Gruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. Nun gilt $\mathfrak{Q} < \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}''$: Denn es ist $\mathfrak{C} < \mathfrak{N}/\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q})$. Also gibt es ein Element $X \in \mathfrak{N} - \mathfrak{Q}$ mit $[X, \mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}$. Dann ist $X \in \mathfrak{Z}''$. Wegen $\mathfrak{Q} < \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}'' \triangleleft \mathfrak{G}$ und der Maximalität von $\mathfrak{Q}$ ist somit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}'' = \mathfrak{N}$. Nun folgt $\mathfrak{Z}'' = \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, also $[\mathfrak{G}, \mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Insbesondere haben wir $[\mathfrak{N}, \mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$. Somit ist $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}$, entgegen (*). Also gilt in $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ der Satz, somit ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$.

c) Sei $\{\mathfrak{Q}_i, i \in I\}$ die Menge aller maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}$ nicht minimal ist, ist $\mathfrak{Q}_i \neq \mathfrak{C}$. Setze $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Q}_i = \mathbf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}_i)$. Nach a) haben wir $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{N}\mathfrak{C}_i\mathfrak{B}_i$ mit $\mathfrak{C}_i \leq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}_i \leq \mathfrak{N}\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q}_i\mathfrak{C}_i\mathfrak{B}_i \triangleleft \mathfrak{G}$.

Nun setze $\mathfrak{Q}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{S}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{B}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i$. Wir zeigen $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i \triangleleft \mathfrak{G}$ gilt $\mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i = \mathfrak{Q}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ gilt $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$. Daraus folgt $\mathfrak{S}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$. Also haben wir $\mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \geq \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ und also $\mathfrak{N} \mathfrak{S}^* = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} \mathfrak{S}^*) \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \triangleleft \mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{N}$ abelsch ist). Wegen $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{S}_i = \mathfrak{Q}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{N} \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$ gilt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}_i] \leq \mathfrak{Q}_i \mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{Q}_i$. Also erhalten wir $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}^*] = [\mathfrak{N}, \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i] \leq \mathfrak{Q}_i$ (für jedes $i \in I$) und daher $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}^*] \leq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}^*$. Also haben wir $\mathfrak{Q}^* \mathfrak{S}^* \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{S}^*$. Für jedes $N \in \mathfrak{N}$ gilt nun $N^{-1} \mathfrak{S}^* N \leq \mathfrak{Q}^* \mathfrak{S}^*$. Wegen $(|\mathfrak{Q}^*|, |\mathfrak{S}^*|) = 1$ und der Nilpotenz von $\mathfrak{S}^*$ sind alle p -Sylowkomplement in $\mathfrak{Q}^* \mathfrak{S}^*$ nach einem Satz von WIELANDT [10] miteinander konjugiert. Daher existiert ein $L^* \in \mathfrak{Q}^*$ mit $N^{-1} \mathfrak{S}^* N = L^{*-1} \mathfrak{S}^* L^*$. Daraus folgt $N L^{*-1} \in \mathfrak{N} \mathfrak{S}^*$, $N \in \mathfrak{Q}^* \mathfrak{N} \mathfrak{S}^*$ und $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{Q}^* \mathfrak{N} \mathfrak{S}^*$. Wegen $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{Q}^*$ folgt $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}^* (\mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N})$. Ist $\mathfrak{N} > \mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N}$, so gibt es einen Index $j \in I$ mit $\mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N} \leq \mathfrak{Q}_j$. Wegen $(\mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N}) \mathfrak{Q}^* = \mathfrak{N}$ folgt dann $\mathfrak{Q}_j \mathfrak{Q}^* = \mathfrak{N}$, und wegen $\mathfrak{Q}_j \geq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}^*$ folgt weiter $\mathfrak{Q}_j = \mathfrak{N}$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Dann folgt $\mathfrak{N} \mathfrak{S}^* \geq \mathfrak{N} \mathfrak{N} \mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ und daher $\mathfrak{S}^* \triangleleft \mathfrak{G}$. Insbesondere haben wir $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}^*] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}^* = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z} \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{S}^* \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ folgt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{B}_i] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i = \mathfrak{S}_i$ (für jedes $i \in I$). Also ist $[\mathfrak{N}, \mathfrak{B}^*] = [\mathfrak{N}, \bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i] \leq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}^* = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z} \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{N}$ haben wir $\mathfrak{B}^* \leq \mathfrak{Z} \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

Nach b) erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i$ alle Bedingungen von Satz 2. Nun liefert die auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}_i \mathfrak{S}_i \mathfrak{B}_i$ angewandte Induktionsannahme $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_i$ (für jedes $i \in I$), und also $\mathfrak{U} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$.

d) Somit sei $\mathfrak{N}$ minimal.

Sei $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{C} \mathfrak{N}$, $\mathfrak{S} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S} \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$. Wir zeigen $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Dazu führen wir eine Induktion nach $|\mathfrak{S}|$ durch. Der Fall $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ ist trivial. Also sei $\mathfrak{S} > \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N} \mathfrak{S} \mathfrak{U}$. $\mathfrak{Q}$ sei ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{B}/\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q}$. Wie in a) haben wir $\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{T} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{H}$.

e) Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{H}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$ alle Bedingungen von Satz 2 erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N} \mathfrak{T} \mathfrak{B}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{Q} \mathfrak{S} \mathfrak{B}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{U}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B} \mathfrak{N}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$. Es genügt wieder zu zeigen

$$(1) \quad \mathfrak{Z}(\mathfrak{N} \mathfrak{T} \mathfrak{B}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B} = \mathfrak{N} \mathfrak{T} \mathfrak{B}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$$

und

$$(2) \quad \mathfrak{Z}(\mathfrak{Q} \mathfrak{S} \mathfrak{B}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{Q} \mathfrak{S} \mathfrak{B}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}.$$

Beweis von (1): geht genau so wie in b). Beweis von (2): Setze $\mathfrak{B}'/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{Q} \mathfrak{S} \mathfrak{B}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{B}' \not\leq \mathfrak{N} \mathfrak{Q} \mathfrak{S} \mathfrak{B}$, so existiert ein $NSU \in \mathfrak{B}'$ mit $N \in \mathfrak{N}$, $S \in \mathfrak{S}$ und $U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{B}$. Daraus folgt, wie in b), $SU \in \mathfrak{B}'$. Da $\mathfrak{S}$ abelsch ist, so ist $\mathfrak{B}' \geq \mathfrak{S}$. Daher haben wir $U \in \mathfrak{B}'$, also $[U, \mathfrak{Q} \mathfrak{S} \mathfrak{B}] \leq \mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$, insbesondere $[U, \mathfrak{S}] \leq \mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{S}$ folgt $[U, \mathfrak{S}] \leq \mathfrak{S} \cap \mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{B} = \mathfrak{T}$. Ist $\mathfrak{T} < \mathfrak{S}$, so ist nach Induktionsannahme (nach $|\mathfrak{S}|$) $[U, \mathfrak{T}] = \mathfrak{E}$ und wegen $(|\langle U \rangle|, |\mathfrak{S}|) = 1$ folgt dann $[U, \mathfrak{S}] = \mathfrak{E}$. Nun folgt $\mathfrak{T} < \mathfrak{S}$ so: Wäre $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$, so wäre $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{B}$, also $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}] \leq \mathfrak{Q}$ und dann $\mathfrak{N} \mathfrak{S} \triangleleft \mathfrak{Q} \mathfrak{S}$. Die Anwen-

dung des Satzes aus WIELANDT [10] gibt wie in c), $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{N} \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N})$ mit $\mathfrak{N} \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{G}$ (wegen $\mathfrak{N} < \mathfrak{Q}$). Wegen $\mathfrak{N} \mathfrak{S} \geq \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ folgt weiter $\mathfrak{N} \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$ (da $\mathfrak{N}$ abelsch ist). Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{N} \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Also haben wir $\mathfrak{N} \mathfrak{S} \geq \mathfrak{N} \mathfrak{N} \mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{S} \triangleleft \mathfrak{G}$. Daher gilt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{S}] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{Z} \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{Z} \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{G}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{T} < \mathfrak{S}$.

Wegen $[U, \mathfrak{S}] = \mathfrak{G}$ ist U im größten p -Normalteiler $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{S} \mathfrak{U}$ enthalten. Wegen $\mathfrak{W} \triangleleft \mathfrak{S} \mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{N} \mathfrak{W} \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{S} \mathfrak{U} = \mathfrak{H}$. Es ist $\mathfrak{G} < \mathfrak{N} / \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{N} \mathfrak{W} / \mathfrak{Q}) \triangleleft \mathfrak{H} / \mathfrak{Q}$. Da $\mathfrak{Q}$ maximal ist, ist dann $\mathfrak{N} / \mathfrak{Q} \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N} \mathfrak{W} / \mathfrak{Q})$, $[\mathfrak{W}, \mathfrak{N}] \leq \mathfrak{Q}$ und daher $\mathfrak{W} \leq \mathfrak{Z} = \mathfrak{N} \mathfrak{T} \mathfrak{W}$. Somit folgt $\mathfrak{W} \leq \mathfrak{W}$, entgegen $U \in \mathfrak{W} - \mathfrak{W}$. Somit ist doch $\mathfrak{Z}' \leq \mathfrak{Q} \mathfrak{S} \mathfrak{W}$, also gilt (2). Nach Induktionsannahme folgt nun $\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{U} = \mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{W}$, das heißt, $\mathfrak{U} = \mathfrak{W}$.

f) Es ist nun $\mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{U} = \mathfrak{Q} \mathfrak{T} \mathfrak{W} \triangleleft \mathfrak{H} = \mathfrak{N} \mathfrak{S} \mathfrak{U}$, daher ist $\mathfrak{T} \mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{S} \mathfrak{U}$. Wegen $[\mathfrak{U}, \mathfrak{T}] = \mathfrak{G}$ (nach Induktion) ist $\mathfrak{U}$ charakteristisch in $\mathfrak{T} \mathfrak{U}$, also folgt $\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{S} \mathfrak{U}$ und dann $[\mathfrak{S}, \mathfrak{U}] \leq \mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{G}$.

g) Sei nun $\mathfrak{N}$ abelsch. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{N} \mathfrak{U}$ ist. Denn angenommen, $\mathfrak{N}$ sei nicht minimal in $\mathfrak{N} \mathfrak{U}$:

1. Ist $|\mathfrak{N}| = q^a r^b \dots$, so ist $\mathfrak{N}(q) < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}(q) \leq \mathfrak{C} \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}(q) \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$. Nach d) ist $[\mathfrak{N}(q), \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$ für alle q , somit haben wir $[\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{Z} \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$.

2. Also sei $|\mathfrak{N}| = q^a$. Dabei ist $q \neq p$. Setze $\mathfrak{W}_i = \{X | X \in \mathfrak{N}, X^{q^i} = E\}$, ($i = 1, 2, \dots$). Ist $\mathfrak{W}_1 < \mathfrak{N}$, so ist nach d) $[\mathfrak{W}_1, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$. Sei schon $[\mathfrak{W}_i, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$ gezeigt. Dann gilt für jedes $X \in \mathfrak{W}_{i+1}$: $X^q = U^{-1} X^q U \in \mathfrak{W}_i$ (für jedes $U \in \mathfrak{U}$), und daher $[U, X^{-1} q] = \mathfrak{G}$, $[U, X^{-1}] \in \mathfrak{W}_1 \leq \mathfrak{W}_i$. Also haben wir $[\mathfrak{U}, \mathfrak{W}_{i+1}] \leq \mathfrak{W}_i$. Wegen $[\mathfrak{U}, \mathfrak{W}_i] = \mathfrak{G}$ und $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{W}_{i+1}|) = 1$ folgt dann $[\mathfrak{W}_{i+1}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$. Somit gilt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{Z} \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}^1$. Also sei $\mathfrak{N} = \mathfrak{W}_1$ elementar abelsch. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}$. Wegen $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{N}|) = 1$ ist sie vollständig reduzibel, aber nicht irreduzibel, da $\mathfrak{N}$ nicht minimal ist. Also ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$, $\mathfrak{G} < \mathfrak{S} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} \mathfrak{S} \geq \mathfrak{U}$, $\mathfrak{N} \mathfrak{T} \geq \mathfrak{U}$. Nach d) ist nun $[\mathfrak{U}, \mathfrak{S}] = [\mathfrak{U}, \mathfrak{T}] = \mathfrak{G}$, also ist $[\mathfrak{U}, \mathfrak{N}] = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{Z} \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$.

h) Also sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{N} \mathfrak{U}$. Angenommen, es gibt ein $E \neq U \in \mathfrak{U}$ und $E \neq R \in \mathfrak{N}$ mit $[U, R] = E$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist $\mathfrak{Z} \mathfrak{U} \geq \mathfrak{U}$. Somit ist $\mathfrak{Z} \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} \mathfrak{U} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} \mathfrak{U}) \mathfrak{U}$ und $E \neq R \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} \mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} \mathfrak{U} = \mathfrak{N}$ und daher $U \in \mathfrak{Z} \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{N}$, also $U = E$, entgegen Voraussetzung. Also sind alle U ohne Fixpunkte. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist somit $\mathfrak{U}$ nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch ²⁾.

¹⁾ Diese Schlußweise geht auf Herrn HUPPERT zurück. Meine ursprüngliche Schlußweise war umständlicher.

²⁾ Hier möchten wir einen elementaren Beweis des zitierten Satzes angeben. Es genügt zu zeigen: Sei $\mathfrak{N}$ elementar abelsch vom Typ (q, q) . Dann gibt es ein Element $R \neq E$ aus $\mathfrak{N}$, das mit einem Element $\neq E$ aus $\mathfrak{N}$ vertauschbar ist. Beweis. Angenommen, der Satz sei falsch. Sei $N \neq E$ ein Element von $\mathfrak{N}$. Setze $N^{\mathfrak{S}} = \prod_{S \in \mathfrak{S}} S^{-1} N S$ für jede Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ der Ordnung q . Dann ist $N^{\mathfrak{S}}$ mit jedem S aus $\mathfrak{S}$ vertauschbar. Also ist $N^{\mathfrak{S}} = E$. Gleichfalls haben wir $N^{\mathfrak{R}} = \prod_{R \in \mathfrak{R}} R^{-1} N R = E$. Aber es ist $\prod_S N^{\mathfrak{S}} = N^{\mathfrak{N}} N^q$, wobei $\mathfrak{S}$ alle Untergruppen von $\mathfrak{N}$ durchläuft. Daraus folgt $N^q = E$ und daher $N = E$, entgegen der Voraussetzung.

i) Nun gilt der folgende HILFSSATZ (vgl. [7], Lemma 3):

Voraussetzungen. $\mathfrak{P}$ sei eine endliche p -Gruppe mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\mathfrak{P}$ enthält einen elementar abelschen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $Z\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. (ii) $\mathfrak{P}$ enthält eine zyklische Untergruppe $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

Behauptung. Ist $\mathfrak{A}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{P}$ mit der Eigenschaft: $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, so gilt $|\mathfrak{U}| \leq p$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{U}| \leq 4$ für $p = 2$.

BEWEIS. Wir führen eine Induktion nach $|\mathfrak{P}|$ durch. Nun gilt zunächst $Z\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Denn da $\mathfrak{A}$ abelsch ist, so ist $Z\mathfrak{A} \geq \mathfrak{A}$ und also $Z\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(Z\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U})$. Ist $Z\mathfrak{A} > \mathfrak{A}$, so ist $Z\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} > \mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, so folgt $Z(Z\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}) \geq \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{A}$ abelsch ist, so ist auch $Z(Z\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}) \geq \mathfrak{A}$, und wegen $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{U}$ folgt $Z(Z\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}) = \mathfrak{P}$. Daraus folgt nach (i) $Z\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \leq C\mathfrak{P} \leq Z\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und daher nach (ii) $Z\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $Z\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

Nun sei $\mathfrak{E} \triangleleft \mathfrak{P}$ mit $|\mathfrak{E}| = p$. Wegen $Z\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist dann $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{N}$ und wegen $Z\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ ist dann auch $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{A}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{E} = C(\mathfrak{P}/\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}$. Wegen $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Z}] \leq \mathfrak{E}$ ist dann $\mathfrak{E}\mathfrak{U}' \triangleleft \mathfrak{P}$.

Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$ alle Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}\mathfrak{E}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}' = \mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}\mathfrak{E}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}' = \mathfrak{A}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$. Es genügt zu zeigen

$$(1) \quad \mathfrak{N}\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{E}\mathfrak{U}' = \mathfrak{E}\mathfrak{U}'$$

und

$$(2) \quad Z(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}') = \mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'.$$

Beweis von (1): Sei $X \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{E}\mathfrak{U}$. Dann existieren Elemente $N \in \mathfrak{N}$, $U' \in \mathfrak{U}'$, $C \in \mathfrak{E}$ und $U \in \mathfrak{U}$ mit $X = NU' = CU$. Daraus folgt $C^{-1}N = U U'^{-1} \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ (nach (ii)). Also ist $X = CU' \in \mathfrak{E}\mathfrak{U}'$. Beweis von (2): Da $\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$ abelsch ist, folgt $Z(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}') \geq \mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$. Ist $Z(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}') > \mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$, so existiert ein $X \in \mathfrak{U} - \mathfrak{U}'$ mit $[\mathfrak{N}\mathfrak{U}', X] \leq \mathfrak{E}\mathfrak{U}'$, insbesondere $[\mathfrak{N}, X] \leq \mathfrak{E}\mathfrak{U}'$. Wegen $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{P}$ (nach (i)) folgt $[\mathfrak{N}, X] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{E}\mathfrak{U}' = \mathfrak{E}$ (nach (ii)). Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, folgt $[\mathfrak{P}, X] = [\mathfrak{N}\mathfrak{U}, X] = [\mathfrak{N}, X] \leq \mathfrak{E}$, das heißt, $X \in \mathfrak{Z}$ und daher $X \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{U}'$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist doch $Z(\mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}') = \mathfrak{N}\mathfrak{U}'/\mathfrak{E}\mathfrak{U}'$, also gilt (2). Nach Induktionsannahme folgt nun $|\mathfrak{U}\mathfrak{E}/\mathfrak{U}'\mathfrak{E}| = |\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'| \leq p$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'| \leq 4$ für $p = 2$. Ist $\mathfrak{U}' = \mathfrak{E}$, dann sind wir fertig. Also sei $\mathfrak{U}' > \mathfrak{E}$.

Nun setze $\mathfrak{B} = \{X^p | X \in \mathfrak{U}'\mathfrak{E}\}$. Da $\mathfrak{U}'\mathfrak{E}$ direktes Produkt von $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{E}$ ist und wegen $|\mathfrak{E}| = p$ folgt $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{U}'$. Da $\mathfrak{B}$ charakteristisch in $\mathfrak{U}'\mathfrak{E}$ ist, ist $\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{P}$. Wegen $Z\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt daraus $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, also da $\mathfrak{U}$ zyklisch ist, $|\mathfrak{U}'| = p$. Somit gilt $|\mathfrak{U}| \leq p^2$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{U}| \leq 8$ für $p = 2$. Ist $|\mathfrak{U}| < p^2$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{U}| < 8$ für $p = 2$, so sind wir fertig. Also sei $|\mathfrak{U}| = p^2$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{U}| = 8$ für $p = 2$.

Ist $C\mathfrak{P}$ nicht zyklisch, so existiert $\mathfrak{E}' \triangleleft \mathfrak{P}$ mit $|\mathfrak{E}'| = p$ und $\mathfrak{E}' \neq \mathfrak{E}$. Nun gilt dasselbe mit $\mathfrak{E}'$ anstatt $\mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{E}' = C(\mathfrak{P}/\mathfrak{E}')$ und $\mathfrak{U}'' = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z}'$. Dann ist (wie oben) $\mathfrak{E}' \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}'\mathfrak{U}'' \triangleleft \mathfrak{P}$ und es gilt der Hilfssatz für $\mathfrak{P}/\mathfrak{E}'\mathfrak{U}''$. Also folgt wieder $|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}''| \leq p$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}''| \leq 4$ für $p = 2$. Wegen $|\mathfrak{U}| = p^2$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{U}| = 8$ für $p = 2$ ist $\mathfrak{U}'' > \mathfrak{E}$, also (wie oben) $|\mathfrak{U}''| = p$.

Da $\mathfrak{U}$ zyklisch ist, folgt $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}''$. Wegen $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{N}$ gilt nun $\mathfrak{G}\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{G}'\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}' \triangleleft \mathfrak{P}$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist dann $\mathfrak{U}' \leq \mathbf{C}\mathfrak{P} \leq \mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und daher $\mathfrak{U}' \leq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, entgegen Voraussetzung. Somit ist $\mathbf{C}\mathfrak{P}$ zyklisch.

Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und da $\mathfrak{N}$ elementar abelsch ist, ist $|\mathbf{C}\mathfrak{P}| = p$. Wegen $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \leq \mathbf{C}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathbf{C}\mathfrak{P}$. Nun ist nach dem Isomorphiesatz $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U} \leq \mathbf{C}\mathfrak{P}$ und $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{G}$. Also gilt $|\mathfrak{U}| = \mathfrak{P} : \mathfrak{U} = |\mathfrak{N}|$. Daraus ergibt sich $|\mathfrak{N}| = p^3$ für $p > 2$ und $|\mathfrak{N}| = 16$ für $p = 2$.

Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ wird $\mathfrak{U}$ treu dargestellt als eine Untergruppe von $GL(m, p)$ mit $m = 3$ für $p > 2$ und $m = 4$ für $p = 2$. Nun bildet die Menge aller Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

eine p -Sylowgruppe von $GL(m, p)$ (vgl. SCHREIER [9]). Nach dem Sylowschen Satz dürfen wir annehmen, daß jede Matrix von $\mathfrak{U}$ diese Gestalt hat. Setze

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offenbar

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^r = 0$$

für jedes $r \geq m$. Sei $p > 2$ und also $m = 3$. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^p = E + \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^p = E$$

(wegen $p \geq 3$), entgegen Voraussetzung. Sei $p = 2$ und also $m = 4$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = E + \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = E,$$

entgegen der Voraussetzung.

j) Nach den Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt die Untergruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ unserer Gruppe $\mathfrak{G}$ die Bedingungen des Hilfssatzes. Wegen $p > 2$ gilt nach dem Hilfssatze also $|\mathfrak{U}| \leq p$.

k) (ohne Minimalität von $\mathfrak{N}$). Man darf annehmen

(R). Es gibt keine echte Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \geq \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{S} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ gesetzt wird.

Denn $\mathfrak{S}$ erfüllt alle Bedingungen von Satz 2 und man kann die Induktionsannahme auf $\mathfrak{S}$ anwenden.

Insbesondere enthält $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ keinen echten Normalteiler $\mathfrak{X}$, der $\mathfrak{U}$ enthält. Denn sei $\mathfrak{X}$ ein solcher Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Setze $\mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}$. Dann erfüllt $\mathfrak{S}$ die Bedingungen in (R). Nämlich wegen $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ folgt $\mathfrak{S} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \geq \mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ folgt $R^{-1}\mathfrak{U}R \leq \mathfrak{X}$ (für jedes $R \in \mathfrak{N}$). Daraus folgt nach dem Sylowschen Satz $\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{X}(\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U})$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}(\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N})$. Nun sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$). Dann existiert ein $NSU \in \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$ mit $N \in \mathfrak{N}$, $S \in \mathfrak{S}$ und $E \neq U \in \mathfrak{U}$. Wegen $[NSU, \hat{S}] = (SU)^{-1}[N, \hat{S}] SU$, $[SU, \hat{S}] = E$, $(SU)^{-1}[N, \hat{S}] SU \in \mathfrak{N}$ und $[SU, \hat{S}] \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ (für jedes $\hat{S} \in \mathfrak{S}$) folgt $[SU, \hat{S}] \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{S}$ (für jedes $\hat{S} \in \mathfrak{S}$), also $SU \in \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$. Nun gilt $[SU, S] = [U, S] = E$. Wegen $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{N}|) = 1$ folgt $U \in \langle SU \rangle$, also $U \in \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$. Wegen $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N})$ folgt also $U \in \mathfrak{Z}\mathfrak{N}$, entgegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$.

l). Nun sei $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] \neq \mathfrak{E}$.

Dann ist $\mathfrak{C}\mathfrak{N} < \mathfrak{N}$, also gilt nach d) $[\mathfrak{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Angenommen, es gebe $E \neq R \in \mathfrak{C}\mathfrak{N}$ und $E \neq N \in \mathfrak{N}$ mit $[R, N] = E$ gibt. Dann ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} \geq \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} \geq \mathfrak{U}$, also folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{R})\mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Wegen $E \neq N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{G}$ und der Minimalität von $\mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, also $R \in \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Daraus folgt $R = E$, entgegen Voraussetzung. Also wird $\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{N}$ ohne Fixpunkte dargestellt, ist daher nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([II], Satz 3) zyklisch.

m) Wir zeigen, daß unter der Bedingung (R) $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ minimal in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ ist. Angenommen, daß $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ nicht minimal in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ ist. Sei $\mathfrak{S}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{Q}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q}$. Wie in a) folgt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{H}$. Wie in b) können wir zeigen, daß $\mathfrak{H}/\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ die Bedingungen von Satz 2 erfüllt. Dabei entsprechen sich gegenseitig: $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{U}/\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{Q}\mathfrak{S}\mathfrak{U}/\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}/\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}/\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$. Nun liefert die auf $\mathfrak{H}/\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ angewandte Induktionsannahme $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{U}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$.

n) Nach unserer Annahme gilt $\mathfrak{C}\mathfrak{N} < \mathfrak{S}$, also $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$.

Fall A: $\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} \leq \mathfrak{S}$. Da $\mathfrak{S}$ maximal und $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}) \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist, folgt $\mathfrak{S}(\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Nun ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{H}$ [nach m)], also $\mathfrak{T} \triangleleft \mathfrak{S}$. Daraus folgt weiter $\mathfrak{T} \triangleleft \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Angenommen $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{E}$. Da $[\mathfrak{N}, \mathfrak{T}] \leq \mathfrak{Q}$ ist, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{T} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{T}$. Da alle $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$, nach einem Satz von WIELANDT

[10] miteinander konjugiert sind, folgt wie in c) $\mathfrak{N}\mathfrak{T} = \mathfrak{U}\mathfrak{T}(\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{T}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{T})$. Daraus folgt $\mathfrak{N} = \mathfrak{U}(\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N})$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{E}$ [wegen $\mathfrak{N} > \mathfrak{U}$]. Wegen $\mathfrak{T} \triangleleft \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T} \triangleleft \mathfrak{U}\mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \geq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also $\mathfrak{N}\mathfrak{T} = (\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{E} < \mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{U}$ (da $\mathfrak{N}$ abelsch ist). Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt daraus $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Somit ist $\mathfrak{N}\mathfrak{T} = \mathfrak{U}$, daher $[\mathfrak{N}, \mathfrak{T}] = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$, entgegen Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. Dann folgt $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{U}\mathfrak{U}$, also $[\mathfrak{U}, \mathfrak{U}] \leq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Dann wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ zu einem echten Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$, der $\mathfrak{U}$ enthält, entgegen (R).

Fall B: Sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N} \leq \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{E} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist dann $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}$ eine p -Sylowgruppe von $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Es gilt $[\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}, \mathfrak{E}] = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N} \leq \mathfrak{E}$ ist daher $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} = (\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N}) \times (\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U})$ (direktes Produkt). Da also $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}$ der größte p -Normalteiler von $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist, folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also $[\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}, \mathfrak{N}] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U} \leq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$. Somit haben wir $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Nun sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{H} \not\leq \mathfrak{N}\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{E}\mathfrak{U}$). Dann folgt wie in k) $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{H} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}\mathfrak{U} \not\leq \mathfrak{E}$, entgegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Daher ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{H} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{E}$. Also wird $\mathfrak{E}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{N}$, die die Bedingung in (R) erfüllt, entgegen (R).

o) Also sei $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ minimal in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ eine elementar abelsche q -Gruppe (q : Primzahl $\neq p$). Setze $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q) \times \mathfrak{E}$ (direktes Produkt; $\mathfrak{E}$; q -Sylowkomplement). Wegen $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{C}\mathfrak{N}$ gilt $[\mathfrak{E}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{N}(q) \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ ist dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(q)) \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, also ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(q)) \cap \mathfrak{U}$ eine p -Sylowgruppe von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(q)) \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Es gilt $[\mathfrak{N}(q), \mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(q)) \cap \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Wegen $[\mathfrak{E}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ folgt dann $[\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(q)) \cap \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$. Daraus folgt weiter $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(q)) \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}(q)) \cap \mathfrak{H} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}(q)$ [wie in n), Fall B]. Also wird $\mathfrak{N}(q)$ einer Untergruppe von $\mathfrak{N}$, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q)$.

Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Angenommen, es gebe $E \neq U \in \mathfrak{U}$ und $R \in \mathfrak{N} - \mathfrak{C}\mathfrak{N}$ mit $[U, R] \in \mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Wegen $[\mathfrak{C}\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{E}$ und $(|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{N}|) = 1$ folgt $[U, R] = E$. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \geq \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} = (\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} \ni R \notin \mathfrak{N} - \mathfrak{C}\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} \geq \mathfrak{C}\mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{N}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{C}\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt dann $\mathfrak{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, also $U \in \mathfrak{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$, daher $U = E$, entgegen Voraussetzung. Also sind alle U ohne Fixpunkte, da $\mathfrak{U}$ abelsch ist; somit ist $\mathfrak{U}$, nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch. Also haben wir nach dem Hilfssatz in i) $|\mathfrak{U}| \leq p$ (wegen $p > 2$).

p) Sei $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} > \mathfrak{E}$ und $X \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Setze $X = A = RU$ mit $A \in \mathfrak{A}$, $R \in \mathfrak{N}$, $U \in \mathfrak{U}$. Dann folgt $AU^{-1} = R$. Wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ (nach Voraussetzung) und $(|\mathfrak{N}|, p) = 1$ folgt daraus $AU^{-1} = R = E$, $X = A = U$ und daher $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} > \mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U}$ abelsch sind, folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Also ist $[\mathfrak{N}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, entgegen Voraussetzung. Also gilt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

Damit gilt $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{N}|$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}\mathfrak{A}/\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{U}$. Wegen $|\mathfrak{U}| \leq p$ [vgl. j) und o)] ist $|\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}| = |\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}| \leq p$.

Setze $|\mathfrak{N}| = p^n$.

Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.

Ist $n > 2$, so setze $\mathfrak{U} = \langle U \rangle$. Angenommen $U \notin \mathfrak{Z}\mathfrak{R}$ (sonst ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$). Es ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} \leq \mathbf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$: Denn $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}$ wird zentralisiert von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$, also von $\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ nicht abelsch. Also gilt $\mathfrak{R} \not\leq \mathfrak{Z}\mathfrak{U}$ und $\mathbf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U}) = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}$.

Setze $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}) \times \langle N^* \rangle$ und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} = \langle N_1 \rangle \times \langle N_2 \rangle \times \dots$.

(**) Ist $E \neq R \in \mathfrak{R}$, so gilt für $E \neq N \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}$ niemals $[N, R] = E$.

Denn sei $[N, R] = E$. Wegen $N \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}$ folgt dann $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \geq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \geq \mathfrak{U}$. Also ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{R}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}) \mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} \ni R$ nach Annahme.

Fall A: $\mathfrak{R}$ sei abelsch. Es ist dann $\mathfrak{R} \triangleleft \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}$ minimal [nach g)]. Wegen $N \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} \leq \mathfrak{Z}\mathfrak{U}$ gilt $U^{-1}\mathfrak{Z}\mathfrak{N}U = \mathfrak{Z}U^{-1}\mathfrak{N}U = \mathfrak{Z}\mathfrak{N}$. Also gilt $E \neq R \in \mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} \triangleleft \mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{R} \langle U \rangle$. Somit folgt nun $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ und $\langle N \rangle \triangleleft \mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt dann $\mathfrak{R} = \langle N \rangle$ und $n = 1$, entgegen Voraussetzung.

Fall B: $\mathfrak{R}$ sei nicht abelsch. Wie im Fall A ist $E \neq R \in \mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} = U^{-1}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R})U$. Da $\mathfrak{R}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt dann entweder $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} \leq \mathbf{C}\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R} = \mathbf{C}\mathfrak{R}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R})$. Sei $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} \leq \mathbf{C}\mathfrak{R}$. Wegen $[\mathbf{C}\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}) \geq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}) \geq \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}) = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}))\mathfrak{U}$ mit $E \neq N \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}) \triangleleft \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt dann $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} \triangleleft \mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$. Daraus $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} \leq \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{G}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{R} = \mathbf{C}\mathfrak{R}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R})$. Es gilt nun $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R}) \geq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R}) \geq \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R}) = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R}))\mathfrak{U}$ mit $E \neq N \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R}) \triangleleft \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{R}$ minimal ist, folgt jetzt $\mathfrak{R} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R})$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R} \triangleleft \mathfrak{G}$ und daraus $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R} \leq \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} \leq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{G}$. Also haben wir $\mathfrak{R} = \mathbf{C}\mathfrak{R} \times (\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R})$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} > \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} \triangleleft \mathfrak{R}$ folgt andererseits $\mathfrak{Z}\mathfrak{N} \cap \mathbf{C}\mathfrak{R} > \mathfrak{G}$. Das ist ein Widerspruch.

Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} \leq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ existiert $E \neq R \in \mathfrak{R}$ mit $[R, U] \neq E$. Setze $R^{-1}N_1R = N'N^{*u_1}$ und $R^{-1}N_2R = N''N^{*u_2}$ mit $N', N'' \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}$. Ist $N^{*u_1} = E$, so ist $R^{-1}N_1R = N'$ und $U^{-1}R^{-1}N_1RU = N'$. Mit $RU = UR_1$ gilt $R_1 \neq R$. Also ist $N' = U^{-1}R^{-1}N_1RU = (UR_1)^{-1}N_1(UR_1) = R_1^{-1}N_1R_1 = R^{-1}N_1R$, also $E \neq RR_1^{-1} \in \mathfrak{Z}N_1$, entgegen (**). Also ist $N^{*u_1} \neq E$. Dann existiert eine Zahl v mit $u_1v \equiv u_2 \pmod{p}$. Nun ist $R^{-1}N_1^vR = N'^vN^{*u_2}$ und $R^{-1}N_1^vN_2^{-1}R = N''^vN''^{-1}$ mit $N_1^vN_2^{-1} \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}$, entgegen (**). Somit doch ist $n = 2$.

q) Nun ist $n = 2$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ treu auf $\mathfrak{R}$ dargestellt, $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \leq GL(2, p)$. Wegen $|\mathfrak{U}| = p$ folgt $[\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \leq \mathfrak{R}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} \leq \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ ist ferner $[\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \neq \mathfrak{G}$.

Sei $\mathfrak{R}$ abelsch. Da dann $\mathfrak{R}$ minimal in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ ist, so folgt $\mathfrak{R} = [\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \leq SL(2, p)$.

Sei $\mathfrak{R}$ nicht abelsch. Sei $[\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \leq \mathbf{C}\mathfrak{R}$. Dann ist insbesondere $[\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] \leq \mathbf{C}\mathfrak{R}$. Wegen $[\mathbf{C}\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = E$ und $(|\mathfrak{R}|, |\mathfrak{U}|) = 1$ folgt dann $[\mathfrak{R}, \mathfrak{U}] = E$, $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{Z}\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, entgegen $|\mathfrak{U}| = p$. Somit ist $[\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \not\leq \mathbf{C}\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{R}$ minimal ist, so folgt $\mathfrak{R} = [\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \mathbf{C}\mathfrak{R}$. Daraus folgt, wie in o), daß $[\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}]$ einer Untergruppe von $\mathfrak{R}$ wird, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir $\mathfrak{R} = [\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \leq SL(2, p)$.

Sei $q > 2$: Dann ist $\mathfrak{N}$ zyklisch. Da $\mathfrak{N}$ elementar abelsch ist ($\mathfrak{N}$ ist minimal in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$), ist also $|\mathfrak{N}| = q$. Nun gilt $q \equiv 1 \pmod{p}$ (in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ gibt es qp -Sylowgruppen), und $p^2 \equiv 1 \pmod{q}$ (in $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ gibt es p^2q -Sylowgruppen). (Denn sonst ist $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N})\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{G} < \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N} < \mathfrak{N}$, entgegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$.) Also gilt $q - 1 = ap$, $p^2 - 1 = bq$, $p^2 - 1 = b(ap + 1)$. Dann folgt $b \equiv -1 \pmod{p}$, $b = cp - 1$, $p^2 - 1 = (cp - 1)(ap + 1)$. Angenommen $c > 1$. Dann folgt $cp - 1 \geq 2p - 1 > p + 1$ (wegen $p > 2$) und $p^2 - 1 > (p + 1) \times (ap + 1)$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $c = 1$, $b = p - 1$, $p + 1 = q$, $p = 2$, entgegen $p > 2$.

Sei $q = 2$: Sei $\mathfrak{N}$ abelsch. $SL(2, p)$ hat nur eine Involution, daher ist $|\mathfrak{N}| = 2$, $\mathfrak{N} \leq \mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})$, entgegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$. Somit ist $\mathfrak{N}$ nicht abelsch, also ist $\mathfrak{N}$ eine verallgemeinerte Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$. Für $|\mathfrak{Q}| > 8$ hat $\mathfrak{Q}$ keinen Automorphismus der Ordnung $p \neq 2$ (vgl. [12], s. 111). Also ist $|\mathfrak{Q}| = 8$ und dann $p = 3$, entgegen $p > 3$.

Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

§ 2. Beweis von Satz 1

Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \geq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$: abelsch) ist $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathfrak{M} \cap \mathbf{Z}\mathfrak{N})$. Wegen $\mathfrak{M} \cap \mathbf{Z}\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ und $[\mathfrak{M} \cap \mathbf{Z}\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] = \mathfrak{G}$ wird $\mathfrak{M} \cap \mathbf{Z}\mathfrak{N} < \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{M}$ keinen Normalteiler ($> \mathfrak{G}$) von $\mathfrak{G}$ enthält, folgt $\mathfrak{M} \cap \mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, also $\mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{R}$ das Radikal (der größte nilpotente Normalteiler) von $\mathfrak{M}$. Dann ist $(|\mathfrak{R}|, p) = 1$. Denn sonst wäre $\mathfrak{R}(p) > \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{N}(p) < \mathfrak{G}$. Dann ist auch $\mathfrak{G} < \mathbf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{N}(p)) \cap \mathfrak{N} < \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathbf{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{N}(p)) \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}(p) \leq \mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{R}(p) = \mathfrak{G}$, entgegen der Voraussetzung. Nach einem Satz von FITTING ([2]) ist $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \leq \mathfrak{R}$. Ist $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \not\leq \mathfrak{R}$, so ist dann $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \not\leq \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{N}\mathfrak{N} \not\leq \mathfrak{M}$. Wegen $\mathfrak{R} < \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{N}\mathfrak{N} \geq \mathfrak{M}$ und also $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = (\mathfrak{N}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{N}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$. Also haben wir $[\mathfrak{N}, \mathfrak{R}] \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{R} \leq \mathbf{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$. Daraus folgt insbesondere $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}$. Somit sei $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{R}$. Setze $\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{U}$. Dann ist $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}$, also ist $\mathfrak{U}$ abelsch. Damit erfüllen das Produkt $\mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ und die Untergruppen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}$ die sämtlichen Bedingungen von Satz 2. Nach Satz 2 gilt also unsere Behauptung $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{R}$.

§ 3. Zusätze zu Satz 1 und 2

Satz 3. Satz 1 gilt für $p = 3$ unter der Bedingung, daß die 2-Sylowgruppe des Radikals $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{M}$ abelsch ist.

Dazu (wie in Satz 1) genügt es zu beweisen

Satz 4. Satz 2 gilt für $p = 3$ unter der zusätzlichen Bedingung, daß die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{R}$ abelsch ist.

Beweis. Im Beweise von Satz 2 wird die Bedingung $p > 3$ benötigt nur in q), § 1, und zwar unter der Annahme, daß $\mathfrak{R}$ eine nicht abelsche 2-Gruppe ist.

Satz 5. Satz 1 gilt für $p = 2$ unter der Bedingung, daß die Ordnung des Radikals $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{M}$ prim zu 3 ist.

Dazu (wie in Satz 1) genügt es zu beweisen

SATZ 6. Satz 2 gilt für $p=2$ unter der zusätzlichen Bedingung, daß die Ordnung von $\mathfrak{R}$ prim zu 3 ist.

BEWEIS. Im Beweise von Satz 2 wird die Bedingung $p > 2$ benötigt an vielen Stellen:

1. In j), § 1: Aus dem Hilfssatz in i), § 1 folgt nur $|\mathfrak{U}| \leq 4$ (anstatt $|\mathfrak{U}| \leq 2$).

2. In o), § 1: Aus dem Hilfssatz in i), § 1 folgt nur $|\mathfrak{U}| \leq 4$ (anstatt $|\mathfrak{U}| \leq 2$).

3. Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$. Dann sind wir fertig. Also sei $|\mathfrak{U}| = 2$. Dann ist die Bedingung $p > 2$ in q), § 1 mit $q > 2$ benötigt. Doch in diesem Falle ist $q = 3$. Wegen unserer Annahme kommt dieser Fall nicht vor. Sei schließlich $|\mathfrak{U}| = 4$. Dann ist in p), § 1 $|\mathfrak{U}/\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}| = |\mathfrak{U}/\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}| = |\mathfrak{U}| = 4$.

Setze $|\mathfrak{R}| = 2^n$. Sei $n > 4$. Setze $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}) \times \langle N_1^* \rangle \times \langle N_2^* \rangle$ und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} = \langle N_1 \rangle \times \langle N_2 \rangle \times \langle N_3 \rangle \times \dots$. Wie in p), § 1 gilt (**). Wegen $Z\mathfrak{R} \leq \mathfrak{R}\mathfrak{U}$ existiert $E \neq R \in \mathfrak{R}$ mit $[R, U] \neq E$ ($\mathfrak{U} = \langle U \rangle$). Setze $R^{-1}N_1R = N'^1 N_1^{*u_{11}} N_2^{*u_{12}}$, $R^{-1}N_2R = N''^1 N_1^{*u_{21}} N_2^{*u_{22}}$, $R^{-1}N_3R = \tilde{N}^1 N_1^{*u_{31}} N_2^{*u_{32}}$ mit $N', N'', \tilde{N} \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}$. Dann gibt es ganze Zahlen c_1, c_2, c_3 , die nicht alle gerade sind, mit $c_1 u_{11} + c_2 u_{21} + c_3 u_{31} \equiv 0 \pmod{2}$, $c_1 u_{12} + c_2 u_{22} + c_3 u_{32} \equiv 0 \pmod{2}$. Dann folgt $R^{-1} \times N_1^{c_1} N_2^{c_2} N_3^{c_3} R = N'^{c_1} N''^{c_2} \tilde{N}^{c_3}$ mit $E \neq N_1^{c_1} N_2^{c_2} N_3^{c_3}$, $N'^{c_1} N''^{c_2} \tilde{N}^{c_3} \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}$. Daraus folgt ein Widerspruch zu (**) [vgl. p), § 1]. Somit ist $n \leq 4$.

Ist $n = 1$, so ist dann $\mathfrak{R} \leq C(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U} \leq Z\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, entgegen $|\mathfrak{U}| = 4$. Sei $n = 2$. Wegen $Z\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U}$ treu auf $\mathfrak{R}$ dargestellt, $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \leq GL(2, 2)$. Wegen $|GL(2, 2)| = 6$ folgt $|\mathfrak{U}| \leq 2$, entgegen $|\mathfrak{U}| = 4$. Sei $n = 3$. Dann wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \leq GL(3, 2)$. Wegen $|GL(3, 2)| = 168$ und $(|\mathfrak{R}|, 3) = 1$ folgt $q = 7$. Wegen $|N(GL(3, 2)(7))| = 21$ kommt dieser Fall nicht vor. Sei schließlich $n = 4$. Dann wird $\mathfrak{R}\mathfrak{U} \leq GL(4, 2)$. Wegen $|GL(4, 2)| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ und $(|\mathfrak{R}|, 3) = 1$ folgt entweder $q = 7$ oder $q = 5$. Sei $|\mathfrak{R}| = q = 7$. Wegen $7 \not\equiv 1 \pmod{4}$, $Z\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}\mathfrak{U} \leq \mathfrak{R}$ und $|\mathfrak{U}| = 4$ kommt dieser Fall nicht vor. Somit ist $|\mathfrak{R}| = q = 5$. $N(GL(4, 2)(5))$ ist auflösbar und hat die Ordnung 60. Jede Untergruppe der Ordnung 20 von $GL(4, 2)$ ist nach dem Sylowschen Satz in einem $N(GL(4, 2)(5))$ enthalten. Alle Untergruppen der Ordnung 20 von $N(GL(4, 2)(5))$ sind, nach einem Satz von P. HALL [4], miteinander konjugiert. Also sind alle Untergruppen der Ordnung 20 von $GL(4, 2)$ miteinander konjugiert. Nun erzeugen

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Untergruppe der Ordnung 20. Sei $(a, b, c, d) \in \mathfrak{R}$. Aus $(a, b, c, d)U = (a, b, c, d)$ folgt $a = b = c = d$. Also haben wir $|C(\mathfrak{R}\mathfrak{U})| = 2$, entgegen $|C(\mathfrak{R}\mathfrak{U})| \geq |\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}| = 4$.

Damit ist der Beweis von Satz 6 beendet.

§ 4. Der Fall $p = 2$

Obgleich Satz 1 für $p \leq 3$ im allgemeinen nicht mehr richtig ist, kann man doch über die Struktur von $\mathfrak{A}$ etwas sagen. Die folgenden Sätze 7 und 8 werden für $p \leq 3$ ausgesprochen. Aber für $p = 3$ werden wir in § 5 stärkere Sätze beweisen.

Satz 7. Voraussetzung: Wie in Satz 1. Behauptung: Für $p \leq 3$ ist der Exponent von $\mathfrak{A}$ höchstens p^2 .

Dazu (wie bei Satz 1) genügt es zu beweisen

Satz 8. Voraussetzung: $p \leq 3$. Alle anderen Bedingungen sind wie in Satz 2. Behauptung: Ist $\mathfrak{A}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{A}\mathfrak{U}$, so ist $\mathfrak{U}$ elementar abelsch und der Exponent von $\mathfrak{A}$ höchstens p^2 .

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$ geführt.

a) Es gilt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A} \cong \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{A}$ elementar abelsch ist, ist insbesondere $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}$ elementar abelsch. Wenn also $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist, ist der Exponent von $\mathfrak{A}$ höchstens p^2 . Also genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist.

b) $\mathfrak{A}$ sei nicht minimal. Sei $\{\mathfrak{Q}_i, i \in I\}$ die Menge aller maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$. Wegen der Nichtminimalität von $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{Q}_i > \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Q}_i = \mathbf{Z}(\mathfrak{A}/\mathfrak{Q}_i)$. Wie in a), § 1 ist $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ mit $\mathfrak{S}_i \leq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_i \leq \mathbf{N}\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i \triangleleft \mathfrak{G}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ (für jedes $i \in I$) alle Bedingungen von Satz 8. Die auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i$ angewandte Induktionsannahme liefert, daß $\mathfrak{Q}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{U}/\mathfrak{Q}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{B}_i \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i$ (für jedes $i \in I$) elementar abelsch ist. Nun setze $\mathfrak{Q}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{S}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{B}^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i$. Wie in c), § 1 gilt $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$. Damit wird $\mathfrak{U}$ elementar abelsch.

c) Daher sei $\mathfrak{A}$ minimal. Nun wie in k), § 1 darf man annehmen

(R). Es gibt keine echte Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geq \mathfrak{U}$ und $\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$ gesetzt wird.

Setze $q=2$ für $p=3$ und $q=3$ für $p=2$. Setze $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}(q) \times \mathfrak{S}(\mathfrak{S}: q\text{-Sylowkomplement})$. Ist $\mathfrak{A}(q) = \mathfrak{E}$, so erfüllt $\mathfrak{G}$ die Bedingungen von Satz 4 oder Satz 6. Dann wird $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ nach Satz 4 oder Satz 6. Somit sei $\mathfrak{A}(q) > \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{R} > \mathfrak{E}$.

Wir zeigen $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$. Dazu zeigen wir zunächst $[\mathfrak{U}, \mathfrak{S}] = \mathfrak{E}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{Q}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Q} = \mathbf{Z}(\mathfrak{A}/\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q}$. Wie in a), § 1 gilt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{I}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} \leq \mathbf{N}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{I}\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{H}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{H}/\mathfrak{Q}\mathfrak{I}\mathfrak{B}$ alle Bedingungen von Satz 4 oder Satz 6. Also nach Satz 4 oder Satz 6 haben wir $\mathfrak{Q}\mathfrak{I}\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}\mathfrak{I}\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{I} \triangleleft \mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}(q) \times \mathfrak{S}$ folgt $\mathfrak{I} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{U}$. Somit haben wir $\mathbf{N}\mathfrak{I} \geq \mathfrak{A}\mathfrak{U}$ und $\mathbf{N}\mathfrak{I} = (\mathbf{N}\mathfrak{I} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{A}\mathfrak{U}$. Wegen $[\mathfrak{A}, \mathfrak{I}] \leq \mathfrak{Q}$ folgt $\mathfrak{Q}\mathfrak{I} \triangleleft \mathfrak{A}\mathfrak{I}$. Wie in c), § 1 unter Anwendung eines Satzes aus WIELANDT [10] erhalten wir $\mathfrak{A} = (\mathbf{N}\mathfrak{I} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{Q}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{I} \cap \mathfrak{A} > \mathfrak{E}$ (wegen $\mathfrak{A} > \mathfrak{Q}$). Da $\mathfrak{A}$ minimal ist, folgt $\mathbf{N}\mathfrak{I} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Daraus folgt $\mathfrak{I} \triangleleft \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{I} \leq \mathbf{Z}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{I} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{I}\mathfrak{B} = \mathfrak{I}\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{S}\mathfrak{U}$ ist daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{I}\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $[\mathfrak{U}, \mathfrak{S}] \leq \mathfrak{S} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Wie in o), § 1 wird dann $\mathfrak{A}(q)$

eine Untergruppe von $\mathfrak{N}$, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q)$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$.

d) Somit sei $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(q)$.

Sei $\mathfrak{N}$ nicht abelsch. Wir zeigen, daß man annehmen darf, daß $\mathfrak{N}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ minimal ist. Angenommen, daß $\mathfrak{N}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ nicht minimal ist. Sei $\mathbf{C}\mathfrak{N} < \mathfrak{S} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U}$. Setze $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N})$. Dann gilt $\mathbf{Z}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{N} \leq \mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} \leq \mathfrak{S}^*$. Dann [wie in n), § 1 Fall B] wird $\mathfrak{S}^*$ einer Untergruppe von $\mathfrak{N}$, die die Bedingung in (R) erfüllt. Nach (R) haben wir also $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$.

Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{Q}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Q} = \mathbf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q}$. Wie in a), § 1 gilt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{I}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} \leq \mathbf{N}\mathfrak{I} \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{I}\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}(\mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N})$ folgt, wie in c), $\mathfrak{I} = \mathfrak{E}$. Dann folgt weiter $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $[\mathfrak{S}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{E}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{H}/\mathfrak{Q}\mathfrak{I}\mathfrak{B} = \mathfrak{H}/\mathfrak{Q}\mathfrak{B}$ die Bedingungen von Satz 8. Die auf $\mathfrak{H}/\mathfrak{Q}\mathfrak{B}$ angewandte Induktionsannahme liefert, daß $\mathfrak{U}\mathfrak{B}/\mathfrak{Q}\mathfrak{B} \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{B}$ elementar abelsch ist.

Setze $\mathfrak{S}' = \mathbf{Z}\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{N} \geq \mathfrak{S}$ folgt $\mathfrak{S}'(\mathbf{Z}\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Wegen $\mathbf{C}\mathfrak{N} < \mathfrak{S}$ folgt $\mathfrak{S}' < \mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{H}' = \mathfrak{N}\mathfrak{S}'\mathfrak{U}$. Sei $\mathfrak{Q}'$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{Q}' = \mathbf{Z}(\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}') \cap \mathfrak{H}'/\mathfrak{Q}'$. Wie in a), § 1 gilt $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{N}\mathfrak{I}'\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{I}' \leq \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{B}' \leq \mathbf{N}\mathfrak{I}' \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q}'\mathfrak{I}'\mathfrak{B}' \triangleleft \mathfrak{H}'$. Genau so wie oben gilt $[\mathfrak{S}', \mathfrak{B}'] = \mathfrak{E}$ und daß $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}'$ elementar abelsch ist.

Wegen $[\mathfrak{S}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{S}', \mathfrak{B}'] = \mathfrak{E}$ folgt $[\mathfrak{S}\mathfrak{S}', \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'] = [\mathfrak{N}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'] = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}' \leq \mathbf{Z}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$. Dann wird $\mathfrak{U}$ elementar abelsch.

e) Somit sei $\mathfrak{N}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ minimal in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$. Bezeichne $\mathbf{F}\mathfrak{N}$ die Frattinigruppe von $\mathfrak{N}$. Wir zeigen, daß wir annehmen $\mathbf{C}\mathfrak{N} = \mathbf{F}\mathfrak{N}$ dürfen. Da $\mathfrak{N}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ minimal ist, ist $\mathfrak{N}/\mathbf{C}\mathfrak{N}$ elementar abelsch, also ist $\mathbf{C}\mathfrak{N} \geq \mathbf{F}\mathfrak{N}$. Sei $\mathbf{C}\mathfrak{N} > \mathbf{F}\mathfrak{N}$. Dann betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}/\mathbf{F}\mathfrak{N}$. Wegen $(p, q) = 1$ ist sie vollständig reduzibel. Also haben wir $\mathfrak{N}/\mathbf{F}\mathfrak{N} = \mathbf{C}\mathfrak{N}/\mathbf{F}\mathfrak{N} \times \mathfrak{S}/\mathbf{F}\mathfrak{N}$ mit $\mathbf{N}\mathfrak{S} \geq \mathfrak{U}$. Nimm $\mathbf{C}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$ anstatt $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ in d). Dann kann man genau so wie in d) schließen, daß $\mathfrak{U}$ elementar abelsch wird.

f) Somit sei $\mathbf{F}\mathfrak{N} = \mathbf{C}\mathfrak{N}$. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}/\mathbf{F}\mathfrak{N}$. Angenommen, daß für ein $E \neq U \in \mathfrak{U}$ und $R \in \mathfrak{N} - \mathbf{F}\mathfrak{N}$ $[R, U] \in \mathbf{F}\mathfrak{N}$ gilt. Da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, folgt dann für jedes $U' \in \mathfrak{U}$ $[U'^{-1}RU', U] \in \mathbf{F}\mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}/\mathbf{F}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathbf{F}\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $[U, \mathfrak{N}] \leq \mathbf{F}\mathfrak{N}$. Nun ist $\langle U \rangle$ eine p -Sylowgruppe von $\mathbf{F}\mathfrak{N}\langle U \rangle$. Nach dem Sylowschen Satz sind alle p -Sylowgruppen von $\mathbf{F}\mathfrak{N}\langle U \rangle$ miteinander konjugiert. Wegen $[U, \mathfrak{N}] \leq \mathbf{F}\mathfrak{N}$ folgt $\mathbf{F}\mathfrak{N}\langle U \rangle \triangleleft \mathfrak{N}\langle U \rangle$. Also haben wir $\mathfrak{N} = \mathbf{F}\mathfrak{N}(\mathfrak{N}\langle U \rangle \cap \mathfrak{N})$ [vgl. c), § 1]. Daraus folgt $\mathfrak{N} = \mathbf{N}\langle U \rangle \cap \mathfrak{N} = \mathbf{Z}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}$ (wegen $\mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{N}\langle U \rangle$), also $U \in \mathbf{Z}\mathfrak{N}$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ folgt $U = E$, entgegen Voraussetzung. Also sind alle $U \neq E$ ohne Fixpunkte. Also, da $\mathfrak{U}$ abelsch ist, ist es nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch. Dann erhalten wir mit dem Hilfssatz in i), § 1 $|\mathfrak{U}| \leq 3$ oder $|\mathfrak{U}| \leq 4$. Sei also $|\mathfrak{U}| = 4$. Sonst sind wir fertig.

g) Sei $\mathfrak{N}$ abelsch. Ist $p=3$, dann erfüllt $\mathfrak{G}$ die Bedingung von Satz 4. Also haben wir nach Satz 4 $\mathfrak{U}=\mathfrak{G}$. Somit sei $p=2$ ($q=3$). Sei $\mathfrak{N}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ nicht minimal. Dann betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Sie ist vollständig reduzibel ($p=2$, $q=3$). Also haben wir $\mathfrak{N}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}=\mathfrak{S}/\mathfrak{F}\mathfrak{N} \times \mathfrak{T}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{F}\mathfrak{N} < \mathfrak{S} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{S} \geq \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{T} \geq \mathfrak{U}$. Nimm $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ anstatt $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ in d). Dann kann man genau so wie in d) schließen, daß $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist. Somit sei $\mathfrak{N}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal. Dann sind wie in f) alle $U \neq E$ auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ ohne Fixpunkte. Also wird $\mathfrak{U}$ wieder zyklisch von der Ordnung ≤ 4 . Sei also $|\mathfrak{U}|=4$. Sonst sind wir fertig.

h) Nun gilt

(***) Ist $R \in \mathfrak{N} - \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, so gilt für $E \neq N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$ niemals $[N, R]=E$.

Denn sei $[N, R]=E$. Wegen $N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \leq \mathbf{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}) \leq \mathbf{Z}\mathfrak{U}$ folgt $[N, U^{-1} \times RU]=E$ (für jedes $U \in \mathfrak{U}$). Setze $\mathfrak{S}\mathfrak{U}=\langle R, \mathfrak{U} \rangle$ mit $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{S} \supset R$. Dann folgt $[\mathfrak{S}, N]=E$. Da $\mathfrak{N}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}\mathfrak{U}/\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ minimal ist und wegen $\mathfrak{S} \supset R \in \mathfrak{N} - \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, folgt $\mathfrak{S}\mathfrak{F}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$, also $\mathfrak{S}=\mathfrak{N}$. Daraus folgt $\langle N \rangle \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, so ist $\mathfrak{N}=\langle N \rangle$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$ und $[N, \mathfrak{U}]=E$ folgt $\mathfrak{U}=\mathfrak{G}$, entgegen $|\mathfrak{U}|=4$.

Setze $|\mathfrak{N}|=2^n$.

Sei $n > 4$. Setze $\mathfrak{N}=\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \times \langle N_1^* \rangle \times \langle N_2^* \rangle$ und $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}=\langle N_1 \rangle \times \langle N_2 \rangle \times \langle N_3 \rangle \times \dots$ [vgl. Beweis von Satz 6, (3)]. Setze $\mathfrak{U}=\langle U \rangle$. Sei $R \in \mathfrak{N} - \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Dann gilt nach f) und g) $RU=UR_1$ mit $RR_1^{-1} \notin \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Wie im Beweis von Satz 6, (3) haben wir: $R^{-1}N_1^{c_1}N_2^{c_2}N_3^{c_3}R=N'^{c_1}N''^{c_2}\hat{N}^{c_3}$ mit nicht lauter geraden ganzen Zahlen c_1, c_2, c_3 und $N', N'', \hat{N} \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$. Weiter gilt, wie in p), § 1, $RR_1^{-1} \in \mathbf{Z}(N_1^{c_1}N_2^{c_2}N_3^{c_3})$, entgegen (***). Somit ist $n \leq 4$.

Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$ wird $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ treu auf $\mathfrak{N}$ dargestellt, $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \leq GL(n, 2)$. Wegen $|\mathfrak{U}|=4$ und $\mathbf{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ folgt $|\mathfrak{N}| \geq 9$. Wegen $|GL(n, 2)| \not\equiv 0 \pmod{9}$ mit $n \leq 3$ muß $n=4$ sein. $GL(4, 2)$ (3) ist elementar abelsch und hat die Ordnung 9. Also ist $\mathfrak{N}=GL(4, 2)$ (3) und $\mathfrak{F}\mathfrak{N}=\mathfrak{G}$. Nach dem Sylowschen Satz sind alle $GL(4, 2)$ (3) miteinander konjugiert. Also darf man annehmen, daß $\mathfrak{N}$ durch

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Da U^2 auf $\mathfrak{N}$ ohne Fixpunkt ist, ist $X=Y$ äquivalent mit $U^2X^{-1}U^2X=U^2Y^{-1}U^2Y$ ($X, Y \in \mathfrak{N}$). Andererseits gilt $U^2(U^2X^{-1}U^2X)U^2=(U^2X^{-1}U^2X)^{-1}$. Für jedes $X \in \mathfrak{N}$ gilt also $U^2XU^2=X^{-1}$. Insbesondere haben wir $U^2R_1U^2=R_1^{-1}$ und $U^2R_2U^2=R_2^{-1}$. Daraus folgt, daß U^2 die folgende Gestalt hat:

$$U^2 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $A, D \in GL(2, 2)$, $|A| = |D| = 2$. Daraus folgt $|ZU^2 \cap \mathfrak{N}| = 4$. Wegen $C(\mathfrak{N}U) \leq \mathfrak{N}$ und $4 \leq |C(\mathfrak{N}U)|$ folgt $ZU^2 \cap \mathfrak{N} = C(\mathfrak{N}U) = ZU \cap \mathfrak{N}$. Wegen der Gestalt von U^2 ist $C(\mathfrak{N}U) = \langle (a, b, 0, 0), (0, 0, c, d) \rangle$ mit irgendwelchen $(a, b) \neq 0 \neq (c, d)$. Es gilt $(0, 0, c, d) R_1 = (0, 0, c, d)$. Wegen $(0, 0, c, d) \in C(\mathfrak{N}U)$ folgt $(0, 0, c, d) U^{-1}RU = (0, 0, c, d)$. Da $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}U$ minimal ist, folgt $[(0, 0, c, d), \mathfrak{N}] = \mathfrak{G}$, $\langle (0, 0, c, d) \rangle \triangleleft \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, haben wir $\mathfrak{N} = \langle (0, 0, c, d) \rangle$ und $n=1$, entgegen der Voraussetzung.

Damit ist der Beweis von Satz 8 vollendet.

§ 5. Der Fall $p = 3$

SATZ 9. Voraussetzung: Wie in Satz 1. Behauptung: Für $p=3$ ist $\mathfrak{N}$ elementar abelsch.

Dazu genügt es zu beweisen

SATZ 10. Voraussetzung: $p=3$. Alle anderen Bedingungen sind wie in Satz 2. Behauptung: Ist $\mathfrak{U}$ eine abelsche 3-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}\mathfrak{N}U$, $\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}U = \mathfrak{N}U$, so ist die Klasse der 3-Gruppe $\mathfrak{N}U$ höchstens 2 und $\mathfrak{U}$ elementar abelsch.

BEWEIS. Der Beweis wird durch Induktion nach $|\mathfrak{G}|$ geführt.

a) Nach Satz 8 ist U elementar abelsch. Ist die Klasse von $\mathfrak{N}U$ höchstens 2, so ist $\mathfrak{N}U$ regulär (P. HALL [3], Corollary 4.13). Da $\mathfrak{N}$ auch elementar abelsch ist, ist daher der Exponent von $\mathfrak{N}U$ gleich 3 (P. HALL [3], Theorem 4.26). Wegen $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{N}U$ ist $\mathfrak{U}$ elementar abelsch. Also braucht man nur zu zeigen, daß die Klasse von $\mathfrak{N}U$ höchstens 2 ist.

b) Wie in k), § 1 darf man annehmen

(R) $\mathfrak{N}$ enthält keine echte Untergruppe $\mathfrak{S}$ mit $N\mathfrak{S} \geq U$ und $Z\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}U$).

c) Sei $\mathfrak{N}$ minimal.

Setze $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(2) \times \mathfrak{Z}$ ($\mathfrak{Z}$: 2-Sylowkomplement). Wie in c), § 4 haben wir $[\mathfrak{Z}, U] = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}$ und daher $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(2)$ [nach (R)]. Ist $\mathfrak{N}$ abelsch, dann erfüllt $\mathfrak{G}$ die Bedingung von Satz 4 und wir haben nach Satz 4 $U = \mathfrak{G}$. Somit sei $\mathfrak{N}$ nicht abelsch.

d) Wir zeigen $[C\mathfrak{N}, U] = \mathfrak{G}$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}C\mathfrak{N}U$. Sei $\mathfrak{Q}$ ein maximaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Q} = Z(\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{H}/\mathfrak{Q}$. Wie in a), § 1 haben wir $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{Z} \leq C\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B} \leq N\mathfrak{Z} \cap U$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \triangleleft \mathfrak{H}$.

Wegen $\mathfrak{Z} \leq C\mathfrak{N}$ folgt $N\mathfrak{Z} \geq \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} \triangleleft C\mathfrak{N}U$ folgt $N\mathfrak{Z} \geq U$. Also haben wir $N\mathfrak{Z} = (N\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{N}U$. Nun gilt $\mathfrak{Q}\mathfrak{Z} \triangleleft \mathfrak{N}\mathfrak{Z}$. Mit dem Satz von SYLOW erhalten wir $\mathfrak{N} = (N\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{Q}$ mit $N\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N} > \mathfrak{G}$ (wegen $\mathfrak{Q} \triangleleft \mathfrak{N}$) [vgl. k), § 1]. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $\mathfrak{N} = N\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{Z} \triangleleft \mathfrak{G}$ und daraus $\mathfrak{Z} \leq Z\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$. Also haben wir $\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}\mathfrak{B} \triangleleft C\mathfrak{N}U$.

Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{H}/\mathfrak{Q}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ alle Bedingungen von Satz 4. Nach Satz 4 haben wir dann $\mathfrak{Q}\mathfrak{Z}U = \mathfrak{Q}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$, daher $U = \mathfrak{B}$. Somit ist $U \triangleleft C\mathfrak{N}U$, also $[U, C\mathfrak{N}] \leq U \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$.

e) Bezeichne $F\mathfrak{N}$ die Frattinigruppe von $\mathfrak{N}$. Wir zeigen $F\mathfrak{N} = C\mathfrak{N}$. Zunächst zeigen wir $F\mathfrak{N} \leq C\mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Z} \triangleleft \mathfrak{N} \cup$. Wegen $Z(\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N})) \cap \mathfrak{N} \leq Z\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N} \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N})$ erfüllt dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N})$ (wie in n), § 1, Fall B) die Bedingung in (R). Nach (R) haben wir also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z} = F\mathfrak{N}$. Dann haben wir $F\mathfrak{N}(Z(F\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N} = Z(F\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \leq Z(F\mathfrak{N})$, also $F\mathfrak{N} \leq C\mathfrak{N}$.

Sei $F\mathfrak{N} < C\mathfrak{N}$. Dann betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{N}/F\mathfrak{N}$. Wegen ihrer vollständigen Reduzibilität ($p=3$, $q=2$) gilt $\mathfrak{N}/F\mathfrak{N} = C\mathfrak{N}/F\mathfrak{N} \times \mathfrak{E}/F\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N}\mathfrak{Z} \geq \mathfrak{N}$. Wegen $[C\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] = \mathfrak{E}$ erfüllt $\mathfrak{Z}$, wie in o), § 1, die Bedingung in (R). Nach (R) haben wir also $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$, entgegen der Voraussetzung. Somit ist $F\mathfrak{N} = C\mathfrak{N}$.

f) Wir zeigen, daß $C\mathfrak{N}$ zyklisch ist. Sonst gibt es nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) $E \neq R \in C\mathfrak{N}$ und $E \neq N \in \mathfrak{N}$ mit $[R, N] = E$. Wegen $[C\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] = \mathfrak{E}$ folgt $Z\mathfrak{N} \geq \mathfrak{N}$ und $Z\mathfrak{N} \geq \mathfrak{N}$, also $Z\mathfrak{N} = (Z\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N})\mathfrak{N} \cup$ mit $Z\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} \geq N$. Da $\mathfrak{N}$ minimal ist, folgt $Z\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, $R \in Z\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und $R = E$, entgegen der Voraussetzung.

g) Wir zeigen $C\mathfrak{N} = F\mathfrak{N} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ und $|C\mathfrak{N}| = 2$. Wegen $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] \leq F\mathfrak{N} = C\mathfrak{N}$ gilt $[X, Y]^2 = [X^2, Y] = E$ für $X, Y \in \mathfrak{N}$. Da $C\mathfrak{N}$ zyklisch ist, ist $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ auch zyklisch. Also haben wir $|[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]| = 2$. Sei $F\mathfrak{N} > [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$. Dann ist $\mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ abelsch vom Typ $(2^a, 2, \dots, 2)$ mit $a > 1$. Setze $\mathfrak{Z}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}])$ (vgl. g), § 1). Nun ist $\mathfrak{Z} \triangleleft \mathfrak{N} \cup$, $\mathfrak{Z} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ zyklisch. Dann gilt $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{N} \cup$, entgegen der Bedingung (R). Somit ist $F\mathfrak{N} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$.

h) HILFSSATZ. Sei $\mathfrak{P}$ eine 2-Gruppe der Ordnung 2^n mit der Eigenschaft: $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = C\mathfrak{P}$, $|[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]| = 2$. Dann besitzt $\mathfrak{P}$ eine einzige treue irreduzible Darstellung Z des Grades 2^r mit $r = (n-1)/2$ (im komplexen Zahlkörper).

BEWEIS. Wegen $|[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]| = 2$ besitzt $\mathfrak{P}$ 2^{n-1} lineare Darstellungen. Wegen $|[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]| = 2$ und $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = C\mathfrak{P}$ ist die Klassenanzahl von $\mathfrak{P}$ gleich $2 + (2^n - 2)/2 = 2^{n-1} + 1$. Also besitzt $\mathfrak{P}$ eine einzige nicht lineare irreduzible Darstellung Z . Sei z der Grad von Z . Nach der Orthogonalitätsrelation gilt $z^2 + 2^{n-1} = 2^n$, also $z = 2^r$. $\mathfrak{P}$ besitzt eine treue Darstellung (z.B. die reguläre Darstellung). Also ist Z treu für $\mathfrak{P}$ als einzige nicht lineare irreduzible Darstellung.

i) HILFSSATZ. Sei $\mathfrak{S}$ eine endliche Gruppe mit folgenden Eigenschaften: 1. $\mathfrak{S}$ enthält einen 2-Normalteiler $\mathfrak{P}$, der die Bedingungen von Hilfssatz h) erfüllt. 2. $\mathfrak{S}$ enthält eine 3-Untergruppe $\mathfrak{Q}$, die elementar abelsch ist und keinen Normalteiler $> \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{S}$ umfaßt. Sei $|\mathfrak{Q}| = m$. 3. $\mathfrak{S}$ erlaubt die Faktorisierung $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Dann besitzt $\mathfrak{S}$ m treue irreduzible Darstellungen vom Grade 2^r , die auf $\mathfrak{P}$ alle gleich Z sind.

BEWEIS. Sei Z^* die induzierte Darstellung von Z auf $\mathfrak{S}$. Der Grad von Z^* ist gleich $m 2^r$. Sei $Z^* = \sum_{i=1, \dots, l} m_i X_i$ die Zerlegung von Z^* in die irreduziblen Bestandteile. Da $\mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{S}$ ist, zerfällt X_i nach einem Satz von FROBENIUS [3] auf $\mathfrak{P}$ in irreduzible Bestandteile des gleichen Grades. Da Z die einzige nicht lineare irreduzible Darstellung von $\mathfrak{P}$ ist, gilt nach dem

Reziprozitätssatz von FROBENIUS [3] $X_i = m_i Z$ (auf $\mathfrak{P}$), also $Z^* = (\sum_{i=1, \dots, l} m_i^2) Z$ (auf $\mathfrak{P}$). Daraus folgt $\sum_{i=1, \dots, l} m_i^2 = m$.

Nun ist $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathbb{C}\mathfrak{P}$ der kleinste Normalteiler $> \mathbb{C}$ von $\mathfrak{S}$. Also ist eine Darstellung von $\mathfrak{S}$ treu auf $\mathfrak{S}$ genau dann, wenn sie $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ treu darstellt. Daher ist die Anzahl der nicht treuen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}$ gleich der Klassenanzahl von $\mathfrak{S}/[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$.

Setze $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \langle C \rangle$. Nun liefert eine Klasse von konjugierten Elementen in $\mathfrak{S}/[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$, die ein Element der Gestalt $Q[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ ($Q \in \Omega$) enthält, zwei Klassen von konjugierten Elementen in $\mathfrak{S}$, nämlich diejenige von Q und diejenige von QC . Also ist die Klassenanzahl von $\mathfrak{S}$ mindestens um m größer als die Klassenanzahl von $\mathfrak{S}/[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$. Daher gibt es mindestens m treue irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{S}$. Wie oben besitzt jede solche Darstellung nur Z als irreduzible Bestandteile auf $\mathfrak{P}$. Nach dem Reziprozitätssatz von FROBENIUS [3] sind diese dann mit $X_1, X_2, \dots, X_l$ identisch. Somit ist $l \geq m$. Wegen $\sum_{i=1, \dots, l} m_i^2 = m$, $m_i \geq 1$ folgt $l = m$, $m_i = 1$.

j) HILFSSATZ. Sei $\mathfrak{S}$ wie in i). Seien $X_1, \dots, X_m$ die treuen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}$. Dann bleiben die entsprechenden modularen Darstellungen $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ für $\mathfrak{z}$ irreduzibel und liegen in $GF(\mathfrak{z})$.

BEWEIS. Wegen $|\mathfrak{P}| = 2^n$ bleibt $\bar{X}_i = Z$ auf $\mathfrak{P}$ irreduzibel für $\mathfrak{z}$. Also bleibt $\bar{X}_i$ irreduzibel für $\mathfrak{z}$ ($i = 1, \dots, m$).

Sei x_i der Charakter von X_i ($i = 1, \dots, m$). Sei $P \in \mathfrak{P} - [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$. Dann sind P und PC konjugiert in $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$. Also gilt $x_i(PC) = x_i(P)$. Andererseits gilt wegen $X_i(C) = Z(C) = -E$ auch $x_i(PC) = -x_i(P)$. Also haben wir $x_i(P) = 0$.

Jedes Element X von $\mathfrak{S}$ wird in der folgenden Form dargestellt: $X = PQ = QP$ mit $P \in \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{z} \equiv 0 \pmod{|Q|}$. Wir bringen P und Q gleichzeitig auf diagonalen Gestalten.

Nun sei e der Exponent von $\mathfrak{S}$, E eine primitive e -te Einheitswurzel, $\mathbb{Q}$ der rationale Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{z}$ in $\mathbb{Q}(E)$.

Sei T eine dritte Einheitswurzel. Wegen $T \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ haben wir $Q \equiv E \pmod{\mathfrak{p}}$, also $X \equiv P \pmod{\mathfrak{p}}$, und daher $x_i(X) \equiv x_i(P) \pmod{\mathfrak{p}}$. Ist insbesondere die Ordnung von X durch 4 teilbar, so haben wir $x_i(X) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Sei $\bar{x}_i$ der Charakter von $\bar{X}_i$. Dann ist $\bar{x}_i(X) = x_i(X) + \mathfrak{p}$ (Restklasse mod $\mathfrak{p}$). Sei $\mathfrak{S}'$ die Menge aller Elemente Y von $\mathfrak{S}$, deren Ordnungen Teiler von $\mathfrak{z}$ sind. Dann haben wir $\langle \bar{x}_i(X), X \in \mathfrak{S}' \rangle = \langle \bar{x}_i(Y), Y \in \mathfrak{S}' \rangle = \langle 1 + \mathfrak{p} \rangle = GF(\mathfrak{z})$. Daher liegt nach einem Satz von R. BRAUER [1] $\bar{X}_i$ in $GF(\mathfrak{z})$.

k) Nun erfüllt die Untergruppe $\mathfrak{H}$ unserer Gruppe $\mathfrak{G}$ die Bedingungen der Hilfssätze in i) und j). Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}$. Wegen $Z\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ und der Minimalität von $\mathfrak{H}$ ist sie treu und irreduzibel. Setze $|\mathfrak{H}| = 2^n$. Dann bekommt man nach den Hilfssätzen in i) und j) $|\mathfrak{H}| = 3^{2^r}$ mit $r = (n-1)/2$.

l) Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}/[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$. Sie ist vollständig reduzibel ($p=3, q=2$). Sei $\mathfrak{H}/[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = \mathfrak{H}_1/[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \times \dots \times \mathfrak{H}_s/[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ eine

Zerlegung von $\mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ in $\mathfrak{U}$ -irreduzible Bestandteile. Sei $\mathfrak{B}_i$ der Kern von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}_i/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ ($i=1, \dots, s$). $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i$ ist ohne Fixpunkte auf $\mathfrak{N}_i/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$. Denn sonst gibt es $U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{B}_i$ und $R \in \mathfrak{N}_i - [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ mit $[U, R] \in [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$. Daraus folgt für jedes $U' \in \mathfrak{U}[U, U'^{-1}RU'] \in [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$. Da $\mathfrak{N}_i/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ minimal ist, folgt weiter $[\mathfrak{U}, \mathfrak{N}_i] \in [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$, also $U \in \mathfrak{B}_i$, entgegen Voraussetzung. Also ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i$ nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch. Da andererseits $\mathfrak{U}$ elementar abelsch ist, haben wir $|\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i| \leq 3$. Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_i$ für irgendein i . Dann folgt $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \supseteq \mathbb{Z}\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U} \geq \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{U} \neq \mathbb{Z}\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}$, entgegen (R). Somit ist $|\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_i| = 3$ ($i=1, \dots, s$). Da die Gruppe der Ordnung 3 nur eine treue irreduzible Darstellung des Grades 2 über $GF(2)$ besitzt, folgt weiter $|\mathfrak{N}_i/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]| = 4$ ($i=1, \dots, s$) und daraus $s=r$.

Wegen $[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{B}_i] \leq [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ ist $[\langle \mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_r \rangle, \bigcap_{i=1, \dots, r} \mathfrak{B}_i] = [\mathfrak{N}, \bigcap_{i=1, \dots, r} \mathfrak{B}_i] \leq [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$. Aus $[[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}], \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$ folgt weiter $[\mathfrak{N}, \bigcap_{i=1, \dots, r} \mathfrak{B}_i] = \mathfrak{G}$. Wegen $\mathbb{Z}\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ haben wir $\bigcap_{i=1, \dots, r} \mathfrak{B}_i = \mathfrak{G}$ und daher $|\mathfrak{U}| \leq 3^r$.

Wegen $\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} \cong \mathfrak{U}$ und $\mathbb{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}) \geq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}$ folgt $|\mathbb{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})| \geq 3^{2^r-r}$.

Sei $\mathfrak{N}_i$ abelsch für irgendein i . Dann folgt $\mathfrak{N} \supseteq \mathbb{Z}\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N} \geq \mathfrak{N}_i$. Also erfüllt $\mathbb{Z}\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N}$, wie in n), § 1, Fall B die Bedingung in (R), entgegen (R). Somit ist $\mathfrak{N}_i$ nicht abelsch ($i=1, \dots, r$).

Sei $r > 1$ und setze $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_1 \dots \mathfrak{N}_{r-1}$. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{E}$. Sei $\mathfrak{B}$ der Kern von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, dann erfüllt $\mathfrak{E}$ die Bedingung in (R), entgegen (R). Denn setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{E}\mathfrak{U}$ und sei $\mathbb{Z}\mathfrak{E} \cap \mathfrak{H} \leq \mathfrak{N}\mathfrak{E}$. Dann wie in k), § 1 gibt es ein $E \neq U \in \mathfrak{U}$ mit $U \in \mathbb{Z}\mathfrak{E}$, entgegen Voraussetzung. Also ist $\mathfrak{B} > \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{B} = \bigcap_{i=1, \dots, r-1} \mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}_r = \mathfrak{G}$ folgt $|\mathfrak{B}| \leq 3$, also haben wir $|\mathfrak{B}| = 3$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{E}\mathfrak{U}$. Wegen $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \geq \mathfrak{E}\mathfrak{U}$ folgt $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = (\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{E}\mathfrak{U}$. Sei $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Dann folgt $\mathfrak{B} \leq \mathbb{Z}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, entgegen $|\mathfrak{B}| = 3$. Somit ist $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} < \mathfrak{N}$. Sei $\mathbb{C}\mathfrak{E} < [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$. Dann ist $\mathbb{C}\mathfrak{E} \leq \mathbb{Z}(\mathbb{C}\mathfrak{E}) \cap \mathfrak{N} < \mathfrak{N}$. Also erfüllt $\mathbb{Z}(\mathbb{C}\mathfrak{E}) \cap \mathfrak{N}$, wie in n), § 1, Fall B die Bedingung in (R), entgegen (R). Somit ist $\mathbb{C}\mathfrak{E} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] = [\mathfrak{E}, \mathfrak{E}]$. Also erfüllt $\mathfrak{E}$ die Bedingung des Hilfssatzes in h). Wegen $|\mathfrak{N}_r/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]| = 4$ ist $|\mathfrak{E}| = 2^{2(r-1)+1}$. Somit besitzt $\mathfrak{E}$ nach dem Hilfssatzes in h) eine einzige treue irreduzible Darstellung des Grades 2^{r-1} .

Nach den Hilfssätzen in i) und j) ist sie als modulare Darstellung mod 3 irreduzibel und liegt in $GF(3)$. Nun betrachten wir die Darstellung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ ist für $\mathfrak{R}$ irreduzibel [wegen der Hilfssätze in i) und j)]. Wegen $\mathfrak{E} \triangleleft \mathfrak{N}$ zerfällt $\mathfrak{N}$ und daher $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ nach einem Satz von FROBENIUS [3] in $\mathfrak{E}$ -irreduzible Bestandteile vom gleichen Grade. Wegen $[\mathfrak{E}, \mathfrak{E}] = [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ sind diese alle treu für $\mathfrak{E}$. Also folgt $|\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}| = 3^{a2^{r-1}}$ mit $a \geq 1$. Wegen $|\mathfrak{N}| = 3^{2^r}$ und $\mathfrak{N} > \mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ folgt $a=1$, also $|\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}| = 3^{2^r-1}$.

Nun gilt andererseits $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} \geq \mathbb{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})$. Wegen $|\mathbb{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U})| \geq 3^{2^r-1}$ folgt $|\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}| \geq 3^{2^r-1}$. Damit haben wir $2^{r-1} \geq 2^r - r$. Wegen $r > 1$ folgt $r=2$ mit der Gleichung $2^{r-1} = 2^r - r$. Also haben wir $|\mathfrak{U}| = 9$, $|\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}| = 9$, daher $\mathbb{Z}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \mathbb{C}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}$.

Wegen $[C(\mathfrak{N} \mathfrak{U}), \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$ folgt $[Z\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$. Da $Z\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ für $\mathfrak{G}$ treu ist, ist $\mathfrak{U}$ der Kern von $\mathfrak{G} \mathfrak{U}$ auf $Z\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$. Also haben wir $\mathfrak{U} \leq Z\mathfrak{G} \cap \mathfrak{N} \mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ und $Z\mathfrak{G} \cap \mathfrak{N} \mathfrak{U} \neq \mathfrak{N} \mathfrak{U}$, entgegen (R). Somit haben wir $r=1$. Daraus folgt $|\mathfrak{U}| \leq 3$, $|\mathfrak{N} \mathfrak{U}| \leq 27$. Also ist die Klasse von $\mathfrak{N} \mathfrak{U}$ gleich höchstens 2.

Wir bemerken noch, daß $\mathfrak{N}$ eine Quaternionengruppe ist.

m) Sei $\mathfrak{N}$ nicht minimal. Sei $\{\mathfrak{Q}_i, i \in I\}$ die Menge aller maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. Setze $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Q}_i = Z(\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}_i)$. Wie in a), § 1 haben wir $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{N} \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$ mit $\mathfrak{Q}_i \leq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{Z}_i \leq \mathfrak{N} \mathfrak{Q}_i \cap \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i \triangleleft \mathfrak{G}$. Wie in b), § 1 erfüllt $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$ die Bedingung von Satz 10.

Wir zeigen, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$ die Bedingung (R) erfüllt. Sei $(\mathfrak{G} \triangleleft) \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$ ($\triangleleft \mathfrak{Q}_i \mathfrak{N} \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$) eine Untergruppe von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{N} \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$ mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i) \geq \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{U} / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$ und $Z(\mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i) \cap \mathfrak{H} / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i \leq \mathfrak{N} \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i$. Dabei wird $\mathfrak{H} = \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ gesetzt. Dann erfüllt $\mathfrak{G}$, entgegen (R), die Bedingung in (R). Denn offensichtlich gilt $Z\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{Z}_i$. Sei $Z\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{G}$. Dann gibt es, wie in k), § 1, ein $E \neq U \in \mathfrak{Z}_i$ mit $U \in Z\mathfrak{G}$. Andererseits gilt $[\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}_i] \leq \mathfrak{Q}_i$, insbesondere $[\mathfrak{N}, U] \leq \mathfrak{Q}_i$. Wegen $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{Q}_i$ und $(|\mathfrak{N}|, |\mathfrak{U}|) = 1$ folgt $[\mathfrak{N}, U] = E$, wegen $Z\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N} \mathfrak{N}$ dann $U = E$, entgegen der Voraussetzung.

n) Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}_i$ für irgendein i . Dann folgt nach (R), $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}_i$.

Sei J die Menge der $i \in I$ mit $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{Q}_i$ und $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{Z}_i$. Nun gilt wie in c), § 1 $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{Q}_i = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Z}_i = \mathfrak{G}$. Also haben wir nach der Definition von $J \bigcap_{i \in J} \mathfrak{Q}_i = \mathfrak{G}$. Wegen $[\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}_j] \leq \mathfrak{Q}_j$ folgt $[\mathfrak{N}, \bigcap_{j \in J} \mathfrak{Z}_j] = \mathfrak{G}$ und daher $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{Z}_j = \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}_j \mathfrak{Q}_j \mathfrak{Z}_j$ die Bedingung (R) erfüllt, ist $\mathfrak{Q}_j \mathfrak{N} \mathfrak{Z}_j / \mathfrak{Q}_j \mathfrak{Q}_j \mathfrak{Z}_j - \mathfrak{N} / \mathfrak{Q}_j$ eine Quaternionengruppe und $|\mathfrak{U}/\mathfrak{Z}_j| = 3$ (nach l).

Da also $\mathfrak{N}/\mathfrak{Q}_j$ den Exponenten 4 hat, so hat auch $\mathfrak{N}$ den Exponenten 4. Wegen $F\mathfrak{N} = \langle X^2, X \in \mathfrak{N} \rangle$ und $[X^2, \mathfrak{N}] \leq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Q}_i = \mathfrak{G}$ folgt $F\mathfrak{N} \leq C\mathfrak{N}$. Aus $[C\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] \leq \bigcap_{i \in J} \mathfrak{Q}_i = \mathfrak{G}$ kann man, wie in e), § 4 folgern $F\mathfrak{N} = C\mathfrak{N}$. Also sind $C\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}/C\mathfrak{N}$ elementar abelsch.

o) Sei $\mathfrak{N}_1/C\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{N} \mathfrak{U}/C\mathfrak{N}$. Wie in n), § 1 erfüllt $\mathfrak{N}_1(Z\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})$ die Bedingung in (R). Also haben wir nach (R) $\mathfrak{N}_1(Z\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{N}_1 \cap (Z\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}_1 \cap C\mathfrak{N}$ ist ferner $\mathfrak{N}/C\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1/C\mathfrak{N} \times (Z\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})/C\mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{N}_2/C\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{N} \mathfrak{U}/C\mathfrak{N}$ in $(Z\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})/C\mathfrak{N}$. Dann haben wir wie oben $(Z\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N})/C\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_2/C\mathfrak{N} \times (Z\mathfrak{N}_1 \cap Z\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N})/C\mathfrak{N}$. In dieser Weise bekommen wir eine $\mathfrak{U}$ -irreduzible Zerlegung von $\mathfrak{N}/C\mathfrak{N}$: $\mathfrak{N}/C\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1/C\mathfrak{N} \times \dots \times \mathfrak{N}_s/C\mathfrak{N}$ mit $[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_j] = \mathfrak{G}$ für $i \neq j$. Sei $\mathfrak{W}'_i$ der Kern von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{N}_i/C\mathfrak{N}$. Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{W}'_i$ für irgendein i . Dann gilt $\mathfrak{N} \mathfrak{U} \supset Z\mathfrak{W}'_i \cap \mathfrak{N} \mathfrak{U} > \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{N} \mathfrak{U} \neq Z\mathfrak{W}'_i \cap \mathfrak{N} \mathfrak{U}$, entgegen (R). Also ist $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{W}'_j$ ($i=1, \dots, s$). Wie in l) ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{W}'_i$ ohne Fixpunkte auf $\mathfrak{N}_i/C\mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{W}'_i$, nach einem Satz von BURNSIDE-ZASSENHAUS ([11], Satz 3) zyklisch. Daher gilt $|\mathfrak{U}/\mathfrak{W}'_i| = 3$. Wegen $[\mathfrak{N}_i, \bigcap_{i=1, \dots, s} \mathfrak{W}'_i] \leq C\mathfrak{N}$, $[C\mathfrak{N}, \mathfrak{U}] = \mathfrak{G}$ und $(|\mathfrak{N}|, |\mathfrak{U}|) = 1$ folgt $[\mathfrak{N}_i, \bigcap_{i=1, \dots, s} \mathfrak{W}'_i] = \mathfrak{G}$ und $\bigcap_{i=1, \dots, s} \mathfrak{W}'_i = \mathfrak{G}$. Also haben wir insbesondere $|\mathfrak{U}| \leq 3^s$. Sei $\mathfrak{N}_i$ abelsch für irgendein i . Dann folgt $\mathfrak{N}_i \leq Z\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ mit $Z\mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N} \neq \mathfrak{N}$. Also erfüllt

$\mathbb{Z}\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}$, wie in n), § 1, Fall B die Bedingung in (R) , entgegen (R) . Somit ist $\mathfrak{R}_i$ nicht abelsch ($i=1, \dots, s$). Setze $\mathfrak{G}_i = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_i]$. Wegen $|\mathfrak{U}/\mathfrak{U}'_i| = 3$ ist der Typ von $\mathfrak{R}_i/\mathbb{C}\mathfrak{R}$ gleich (2,2). Also gibt es zwei Elemente $X_i, Y_i \in \mathfrak{R}_i$ mit $\mathfrak{R}_i = \langle X_i, Y_i, \mathbb{C}\mathfrak{R} \rangle$. Daraus folgt $\mathfrak{G}_i = \langle [X_i, Y_i] \rangle$. Wegen $[X_i, Y_i]^2 = [X_i^2, Y_i^2] = E$ folgt $|\mathfrak{G}_i| = 2$.

p) Nun zeigen wir, daß $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i$ elementar abelsch ist. Angenommen, $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i$ sei nicht elementar abelsch. Da $\mathbb{C}\mathfrak{R}$ elementar abelsch ist und $\mathfrak{R}_i/\mathbb{C}\mathfrak{R}$ den Typ (2,2) hat, ist der Typ von $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i$ entweder (i) (4, 2, ...) oder (ii) (4, 4, 2, ...).

Fall (i). Setze $\mathfrak{Z}/\mathfrak{G}_i = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i)$ (vgl. g), § 1). Dann gilt $\mathfrak{Z} \triangleleft \mathfrak{R}\mathfrak{U}$, $|\mathfrak{R}_i/\mathfrak{Z}| = |\mathfrak{Z}/\mathbb{C}\mathfrak{R}| = 2$. Daraus folgt $[\mathfrak{R}_i, \mathfrak{U}] \leq \mathbb{C}\mathfrak{R}$, also $\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}'_i$, entgegen $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{Z}'_i[0]$.

Fall (ii). Sei $X\mathfrak{G}_i$ ($X \in \mathfrak{R}_i$) ein Basiselement der Ordnung 4 von $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i$. Wegen $X^2 \in \mathbb{C}\mathfrak{R}$ und $[\mathfrak{U}, \mathbb{C}\mathfrak{R}] = \mathfrak{G}$ folgt $\langle X^2, \mathfrak{G}_i \rangle \triangleleft \mathfrak{R}\mathfrak{U}$. Da der Typ von $\mathfrak{R}_i/\langle X^2, \mathfrak{G}_i \rangle$ gleich (4, 2, ...) ist, bekommen wir wie in Fall (i) einen Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i$ elementar abelsch.

Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i$. Wegen ihrer vollständigen Reduzibilität ($p=3, q=2$) haben wir $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{G}_i = \mathbb{C}\mathfrak{R}/\mathfrak{G}_i \times \mathfrak{D}_i/\mathfrak{G}_i$. $\mathfrak{D}_i$ hat die Ordnung 8 und besitzt einen Automorphismus der Ordnung 3 (wegen $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{Z}'_i$). Da außerdem $\mathfrak{D}_i$ nicht abelsch ist, ist $\mathfrak{D}_i$ eine Quaternionengruppe ($i=1, \dots, s$). Wegen $\mathbb{F}\mathfrak{R} = \mathbb{C}\mathfrak{R}$ haben wir, nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}_1 \dots \mathfrak{D}_s \mathbb{C}\mathfrak{R} = \mathfrak{D}_1 \dots \mathfrak{D}_s$.

q) Jetzt zeigen wir $\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s = \mathfrak{G}_1 \times \dots \times \mathfrak{G}_s$. Angenommen, $\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_s$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_s$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $\mathfrak{G}_1 \times \dots \times \mathfrak{G}_t \leq \mathfrak{G}_a$ und $a > t$. Wegen $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{Z}_j = \mathfrak{G}$ gibt es dann eine Ziffer $j \in J$ mit $\mathfrak{G}_a \leq \mathfrak{Z}_j$. Also gibt es auch ein i mit $1 \leq i \leq t$ und $\mathfrak{G}_i \leq \mathfrak{Z}_j$. Notfalls die Ziffer ändernd, können wir annehmen $\mathfrak{G}_1 \leq \mathfrak{Z}_j$. Wir betrachten die Darstellungen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_a$ auf $\mathfrak{R}/\mathfrak{Z}_j$. Dann ist $\mathfrak{Z}_j$ der Kern von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}/\mathfrak{Z}_j$. Wegen $|\mathfrak{R}/\mathfrak{Z}_j| = 8$ folgt $|\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_a / \mathfrak{Z}_j \cap \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_a| \leq 8$. Andererseits gilt $|\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_a \mathbb{C}\mathfrak{R} / \mathbb{C}\mathfrak{R}| = |\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_a / \mathbb{C}\mathfrak{R}| = 16$. Also gibt es in $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_a \cap \mathfrak{Z}_j$ ein Element $Q_1 Q_a$ ($Q_1 \in \mathfrak{D}_1, Q_a \in \mathfrak{D}_a$) mit $Q_1 \notin \mathfrak{G}_1$ oder $Q_a \notin \mathfrak{G}_i$. Sei etwa $Q_1 \notin \mathfrak{G}_1$. Dann gibt es wegen $[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_a] (\geq [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_a]) = \mathfrak{G}$ ein Q'_1 mit $[Q_1, Q'_1] \neq E$ und $[Q_a, Q'_1] = E$. Nun folgt $\mathfrak{G}_1 \leq \mathfrak{Z}_j \cap \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_a \leq \mathfrak{Z}_j$, entgegen der Voraussetzung.

r) Wir zeigen $\mathfrak{D}_1 \dots \mathfrak{D}_s = \mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_s$. Angenommen, $\mathfrak{D}_1 \dots \mathfrak{D}_s$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_s$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $(\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_t) \cap \mathfrak{D}_a > \mathfrak{G}$ und $a > t$. Sei $Q_a = Q_1 \dots Q_t$ ($Q_i \in \mathfrak{D}_i$ für $i=1, \dots, t$ und a) ein von Eins verschiedenes Element von $(\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_t) \cap \mathfrak{D}_a$. Wegen $\mathfrak{G} = [\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_j] \geq [\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_j]$ ($i \neq j$) folgt $[(\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_t) \cap \mathfrak{D}_a, \mathfrak{D}_a] = \mathfrak{G}$. Wegen $[\mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}_i] = [\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_i] = \mathfrak{G}_i \leq \mathbb{C}\mathfrak{R}$ gilt $(\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_t) \cap \mathfrak{D}_a \leq \mathfrak{G}_a \leq \mathbb{C}\mathfrak{R}$. Also haben wir $Q_a \in \mathfrak{G}_a$. Wegen $(\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_t) \cap \mathbb{C}\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_1 \times \dots \times \mathfrak{G}_t$ ist weiter $Q_1 \in \mathfrak{G}_1, \dots, Q_t \in \mathfrak{G}_t$. Dann haben wir nach q) $Q_a = Q_1 \dots Q_t = E$, entgegen der Voraussetzung.

Sei $s=1$. Wegen $|\mathfrak{R}/\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}| = |\mathfrak{U}|$ und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} \leq \mathbb{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$ folgt nun $|\mathfrak{R}/\mathbb{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})| \leq 3$ und $[\mathfrak{R}\mathfrak{U}, \mathfrak{R}\mathfrak{U}] \leq \mathbb{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{U})$. Dann sind wir fertig. Also sei $s > 1$.

Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_{s-1}$. Sei $\mathfrak{B}_s$ der Kern von $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{B}_s = \mathfrak{G}$, dann erfüllt $\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_{s-1}$ wie in l) die Bedingung

in (R) , entgegen (R) . Also ist $\mathfrak{W}_s > \mathfrak{C}$. Wegen $\mathbf{Z}\mathfrak{H} \leq \mathfrak{H}\mathfrak{H}$ und $|\mathfrak{Q}_s| = 8$ folgt $|\mathfrak{W}_s| \leq 3$. Also haben wir $|\mathfrak{W}_s| = 3$. Offenbar gilt $\mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s \triangleleft \mathfrak{H}\mathfrak{U}$. In gleicher Weise bekommen wir die Untergruppen $\mathfrak{W}_1, \dots, \mathfrak{W}_{s-1}$ von $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ mit $|\mathfrak{W}_i| = 3$ und $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i \triangleleft \mathfrak{H}\mathfrak{U}$ ($i = 1, \dots, s-1$).

s) Nun zeigen wir $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \dots \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \dots \times \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s = \mathfrak{H}\mathfrak{U}$. Angenommen $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \dots \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1, \dots, \mathfrak{Q}_s \mathfrak{W}_s$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \dots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a > \mathfrak{C}$ und $a > t$. Nach der Definition der Untergruppen $\mathfrak{W}$ haben wir $[\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i, \mathfrak{Q}_j \mathfrak{W}_j] = \mathfrak{C}$ ($i \neq j$). Also folgt $[(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \dots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a, \mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i] = \mathfrak{C}$ für $i = 1, \dots, t$ und a . Nun ist das Zentrum von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i$ gleich $\mathfrak{C}_i$ ($i = 1, \dots, s$). Also haben wir einerseits $(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \dots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a \leq \mathfrak{C}_a$ und andererseits $(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{W}_1 \times \dots \times \mathfrak{Q}_t \mathfrak{W}_t) \cap \mathfrak{Q}_a \mathfrak{W}_a \leq \mathfrak{C}_1 \times \dots \times \mathfrak{C}_t$, entgegen q). Daraus folgt insbesondere $|\mathfrak{H}\mathfrak{U}| = 3^s$.

Da $\mathfrak{H}\mathfrak{U}/[\mathfrak{H}\mathfrak{U}, \mathfrak{H}\mathfrak{U}] \cong \mathfrak{W}_1 \times \dots \times \mathfrak{W}_s$ eine 3-Gruppe und $\mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U}) = \mathfrak{C}_1 \times \dots \times \mathfrak{C}_s$ eine 2-Gruppe ist, ist die direkte Zerlegung von $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ in direkt unzerlegbaren Faktoren eindeutig ([12], S. 82).

t) Wegen $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{W}_j = \mathfrak{C}$ und $|\mathfrak{H}\mathfrak{U}| = 3^s$ haben wir $|J| \geq s$. Also (notfalls die Ziffern verändernd) dürfen wir annehmen $J \ni 1, \dots, s$. Wir betrachten die Darstellung von $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}_i$ ($i = 1, \dots, s$). Da $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}_i$ eine Quaternionengruppe ist, gibt es eine Nummer i' mit $\mathfrak{C}_i \leq \mathfrak{Z}_{i'}$ ($i = 1, \dots, s$). Da $\mathfrak{C}_i$ der kleinste Normalteiler $> \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'}$ ist, folgt $\mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'} \cap \mathfrak{Z}_{i'} \mathfrak{W}_{i'} = \mathfrak{C}$. Wegen $\mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'} \triangleleft \mathfrak{H}\mathfrak{U}$ folgt weiter $\mathfrak{H}\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}_{i'} \mathfrak{W}_{i'} \times \mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'}$. Nun können wir annehmen, daß alle $\mathfrak{Z}_i \mathfrak{W}_i$ ($i = 1, \dots, s$) verschieden sind (wegen $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{W}_j = \mathfrak{C}$). Dann folgt daraus wegen der Eindeutigkeit der direkten Zerlegung von $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ in direkt unzerlegbaren Faktoren [nach s)], daß alle $\mathfrak{Q}_{i'} \mathfrak{W}_{i'}$ miteinander verschieden sind. Also (notfalls die Ziffern verändernd) darf man annehmen $i = i'$ ($i = 1, \dots, s$).

Wegen $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{Z}_i \triangleleft \mathfrak{H} \mathfrak{Z}_i$ bekommen wir wie in k), § 1, mit dem Satz von SYLOW $\mathfrak{H} = (\mathbf{N} \mathfrak{Z}_i \cap \mathfrak{H}) \mathfrak{Q}_i$. Wir setzen $\mathfrak{H}_i = \mathbf{N} \mathfrak{Z}_i \cap \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{Q}^* = \mathbf{N} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}$ ($i = 1, \dots, s$). Wegen $\mathbf{N} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H} = \mathbf{Z} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}$ folgt $\mathfrak{Q}^* \leq \mathfrak{H}_i$ ($i = 1, \dots, s$). Da die Darstellung von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i$ auf $\mathfrak{H}_i$ treu ist, folgt $\mathfrak{Q}^* < \mathfrak{H}_i$ ($i = 1, \dots, s$). Offenbar gilt $\mathfrak{H}_i \triangleleft \mathfrak{H}\mathfrak{U}$.

Wir zeigen $(\mathfrak{H}_1/\mathfrak{Q}^*) \dots (\mathfrak{H}_s/\mathfrak{Q}^*) = \mathfrak{H}_1/\mathfrak{Q}^* \times \dots \times \mathfrak{H}_s/\mathfrak{Q}^*$. Angenommen $(\mathfrak{H}_1/\mathfrak{Q}^*) \dots (\mathfrak{H}_s/\mathfrak{Q}^*)$ sei kein direktes Produkt von $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{Q}^*, \dots, \mathfrak{H}_s/\mathfrak{Q}^*$. Dann gibt es eine Ziffer a mit $(\mathfrak{H}_1/\mathfrak{Q}^* \times \dots \times \mathfrak{H}_t/\mathfrak{Q}^*) \cap \mathfrak{H}_a/\mathfrak{Q}^* > \mathfrak{C}$ und $a > t$. Wegen $[\mathfrak{H}_i, \mathfrak{Z}_i] = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}_j = \mathfrak{H}$ ($i, j = 1, \dots, s$; $i \neq j$) folgt $[(\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_t) \cap \mathfrak{H}_a, \mathfrak{H}] \leq \mathfrak{Q}^*$, $(\mathfrak{H}_1/\mathfrak{Q}^* \times \dots \times \mathfrak{H}_t/\mathfrak{Q}^*) \cap \mathfrak{H}_a/\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{C}$, entgegen der Voraussetzung. Da die Darstellung von $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{W}_i$ auf $\mathfrak{H}_i$ treu ist, folgt daraus insbesondere $|\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_s/\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_s \cap \mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U})| \geq 3^s$.

Andererseits haben wir $|\mathfrak{H}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}| = |\mathfrak{H}| = 3^s$. Also gilt wegen $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H} \leq \mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U})$ dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_s \mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U})$ und $|\mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_i \cap \mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U})| = 3$. Daraus folgt insbesondere $\mathfrak{H}_i \cap \mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U}) \geq [\mathfrak{H}_i, \mathfrak{W}_i]$.

Nun gilt schließlich $[\mathfrak{H}, \mathfrak{U}] = [\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_s \mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U}), \mathfrak{U}] = [\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_s, \mathfrak{U}] = [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{U}] \dots [\mathfrak{H}_s, \mathfrak{U}] = [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{W}_1] \dots [\mathfrak{H}_s, \mathfrak{W}_s] \leq \mathbf{C}(\mathfrak{H}\mathfrak{U})$. Also ist die Klasse von $\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ höchstens gleich zwei.

Damit ist der Beweis von Satz 10 vollendet.

BEISPIEL. Sei $p \leq 3$ und $\mathfrak{N}$ elementar abelsch vom Typ (p, p) . Sei $\mathfrak{G}$ die Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $GL(2, p)$ mit zerfallenden Faktorensystemen. Dann kann man als $\mathfrak{N}$ nehmen: $\langle (1, 0) * \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix} \rangle$ für $p=2$ und $\langle (1, 0) * \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}, (0, 1) \rangle$ für $p=3$. Dabei bezeichnet $*$ die Multiplikation in $\mathfrak{G}$.

Literatur

- [1] BRAUER, R.: Über Systeme hyperkomplexer Zahlen. Math. Z. **30**, 79–107 (1929).
- [2] FITTING, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jber. dtsh. Math. Verein. **48**, 77–141 (1938).
- [3] FROBENIUS, G.: Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppen und denen ihrer Untergruppen. Sitz. Berlin (1898), 501–515.
- [4] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98–105 (1928).
- [5] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. London Math. Soc. **36**, 29–95 (1934).
- [6] HUPPERT, B.: Primitive, auflösbare Permutationsgruppen. Arch. Math. **6**, 303–310 (1955).
- [7] ITÔ, N.: On primitive permutation groups. Acta sci. math. **16**, 207–228 (1955).
- [8] RITT, J. F.: On algebraic functions which can be expressed in terms of radicals. Trans. Amer. Math. Soc. **24**, 21–30 (1923).
- [9] SCHREIER, O.: Über die Erweiterung von Gruppen II. Abh. math. Sem. Hamburg **4**, 321–346 (1926).
- [10] WIELANDT, H.: Zum Satz von SYLOW. Math. Z. **60**, 407–408 (1954).
- [11] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Hamburg **11**, 187–220 (1936).
- [12] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig u. Berlin 1937.

Mathematisches Institut der Nagoya-Universität, Nagoya-Chikusa (Japan)

(Eingegangen am 14. Dezember 1959)

Über topologische Abbildungen der Brezelfläche vom Geschlecht 2

JAKOB NIELSEN zum Gedenken

Von

P. BERGAU und J. MENNICKE

Topologische Abbildungen orientierbarer Flächen sind bereits von vielen Autoren untersucht worden. Wir nennen hier nur J. NIELSEN [14], [15], [16], M. DEHN [11], R. BAER [5], [6], [7] und L. GOERITZ [12], [13].

Die weitestreichenden Untersuchungen sind ohne Zweifel die von J. NIELSEN. Er zieht den auf H. POINCARÉ zurückgehenden Gedanken heran, die hyperbolische Ebene mit einer gewissen Pflasterung und einer auf dieser Pflasterung einfach transitiv operierenden Gruppe von hyperbolischen Bewegungen aufzufassen als eine metrische Realisierung der universellen Überlagerung mit ihrer Deckbewegungsgruppe. Das zweite entscheidende Hilfsmittel NIELSENS ist seine Methode der „Randpunktentwicklung“: Jedem Punkt des Randkreises der hyperbolischen Ebene wird eine Folge von Elementen der Fundamentalgruppe in geometrisch naheliegender Weise zugeordnet. Die Selbstabbildungen induzieren Automorphismen auf der Fundamentalgruppe und diese induzieren Abbildungen des Randkreises auf sich. Man hat also die induzierten Abbildungen des Randkreises zu untersuchen. Von den vielen schönen mit dieser Methode erhaltenen Sätzen nennen wir etwa den folgenden bekannten: Jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe läßt sich durch eine topologische Selbstabbildung der Fläche induzieren. Das führt zu der Einsicht, daß die Gruppe der Selbstabbildungen, abgesehen von Deformationen, isomorph ist zu der äußeren Automorphismengruppe der Fundamentalgruppe.

Die oben zitierten Untersuchungen von M. DEHN, R. BAER und L. GOERITZ haben eine andere Struktur. Hier wird die Tatsache herangezogen, daß einfache Kurvensysteme auf der Fläche, das sind solche Systeme einfacher, das ist doppelpunktfreier Kurven, deren je zwei sich nicht schneiden, bei topologischen Abbildungen der Fläche wieder auf einfache Kurvensysteme abgebildet werden. Es handelt sich also darum, einfache Kurvensysteme auf der Fläche zu untersuchen und sie zu klassifizieren. Das hat für das Geschlecht 2 zuerst DEHN durchgeführt und nach ihm für beliebiges Geschlecht BAER und GOERITZ. Insbesondere gelingt es mit dieser Methode, von gewissen einfachen Abbildungen zu zeigen, daß sie im wesentlichen, d.h. bis auf Deformationen, die Gruppe aller Selbstabbildungen erzeugen.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf das Geschlecht 2. Ihr liegen bezüglich des Erzeugendensystems die Arbeiten von DEHN, BAER und GOERITZ

zugrunde. Um unsere Arbeit unabhängig von diesen Untersuchungen lesbar zu gestalten, haben wir in einem einleitenden Abschnitt die von L. GOERITZ angegebenen Erzeugenden beschrieben und die von ihnen induzierten Automorphismen angeführt.

Die Poincarésche Pflasterung besteht in unserem Falle aus Achtecken. Wir gehen durch Unter- und Oberteilung über zu einer Pflasterung mit Sechsecken. Die Ecken der Sechsecke bilden ein gewisses Punktnetz. Die von den Spiegelungen an den Punkten des Netzes erzeugte Punktspiegelungsgruppe ist Obergruppe der Fundamentalgruppe vom Index 2. Ihr und dem Punktnetz wenden wir unser Interesse zu.

Wir bemerken, daß es in der Gruppe der Selbstabbildungen der Brezelfläche vom Geschlecht 2, wenn man von Deformationen absieht, ein nicht-triviales Zentrum gibt, das ein Element der Ordnung 2 enthält. Diese Bemerkung, die für höheres Geschlecht nicht zutrifft, führt dazu, daß man die Automorphismen der Fundamentalgruppe fortsetzen kann zu Automorphismen der Punktspiegelungsgruppe. Auf dem Punktnetz induzieren die Automorphismen gewisse Kollineationen; diese werden von besonders einfachen, sog. Scherungen erzeugt.

Es gelingt uns, für alle Automorphismen eine konfigurative Kennzeichnung anzugeben. Sie besteht in folgendem: Eine zu einem Automorphismus gehörige Kollineation ist durch die Abbildung der Ecken eines Grundsechsecks bereits bestimmt. Wir geben ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß ein beliebiges Sechseck des Punktnetzes Bild bezüglich einer durch einen Automorphismus induzierten Kollineation ist. Dieses Kriterium zieht nur die Gestalt des Sechsecks heran, nicht aber seine Lage im Punktnetz.

Schließlich bemerken wir, daß ein enger Zusammenhang zwischen der Automorphismengruppe und einer Artinschen Zopfgruppe besteht. Die Gruppe der zu orientierungserhaltenden Abbildungen gehörigen Automorphismen ist homomorphes Bild der Zopfgruppe aus sechs Fäden. Aus einer genaueren Untersuchung dieses Homomorphismus erhalten wir für die Automorphismengruppe ein System definierender Relationen.

In einem Anhang stellen wir ein zahlentheoretisches Ergebnis dar, das auch für beliebiges Geschlecht gilt. Es handelt sich darum, daß man die Fundamentalgruppen der orientierbaren Flächen mit Hilfe einer geeigneten quadratischen Form treu als orthogonale Gruppen über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen darstellen kann.

1. Eine topologische Selbstabbildung einer Brezelfläche F_p vom Geschlecht p induziert einen Automorphismus in der Fundamentalgruppe der Fläche. Da zur Fixierung der Fundamentalgruppe ein Anfangspunkt auszuzeichnen ist, so ist dieser Automorphismus nur bis auf einen inneren Automorphismus bestimmt, entsprechend einem Wechsel des Anfangspunktes.

Deformationen induzieren innere Automorphismen. BAER [6] und GOERITZ [13] haben gezeigt, daß auch umgekehrt diejenigen Flächenabbildungen, die innere Automorphismen induzieren, Deformationen sind.

NIELSEN [14] hat bewiesen, daß sich auch jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe durch eine Selbstabbildung der Fläche induzieren läßt. Die hier nicht interessanten Fälle der Kugel und des Torus mögen ausgeschlossen sein.

Bezeichnet $\tilde{\mathfrak{F}}$ die Fundamentalgruppe der Brezelfläche F_p , $\mathfrak{A}$ die Automorphismengruppe von $\tilde{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{I}$ die Gruppe der inneren Automorphismen von $\tilde{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{B}$ die Gruppe der topologischen Selbstabbildungen von F_p und $\mathfrak{D}$ den Normalteiler der Deformationen, so kann man also folgende Isomorphie aussprechen:

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{I} \cong \mathfrak{B}/\mathfrak{D}.$$

Für die Gruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{D}$ ist der Name *Abbildungstypengruppe* gebräuchlich.

Bei der Untersuchung von Flächenabbildungen können wir also nach Belieben entweder die Flächenabbildungen selbst oder die durch sie induzierten Automorphismen ins Auge fassen.

2. Im folgenden betrachten wir die Brezelfläche F_2 vom Geschlecht 2.

Wir werden in Anlehnung an BAER [6] und GOERTZ [13] einige Selbstabbildungen von F_2 geometrisch definieren und die induzierten Automorphismen angeben.

Wir legen für F_2 das in Fig. 1 beschriebene Schema zugrunde. Schneidet man die Fläche längs der Kurven S_i auf, so entstehen zwei Kugeln mit je drei Löchern. Schneidet man auch noch längs der Kurven U_i auf, so zerfällt jede Kugel in zwei Sechsecke. Die Bezeichnung der Sechsecke und der zu den einzelnen Sechsecken gehörigen Strecken von S_i , U_i ist der Fig. 2 zu entnehmen. Beim Übergang von Fig. 2 zu Fig. 1 wird U_3 ausgezeichnet: man hat beim Zusammenheften der vier Sechsecke U_3 nach außen zu stülpen.

In Fig. 3 ist ein fundamentales Kurvensystem und ein Anfangspunkt auf der Fläche festgelegt. Die erzeugenden Wege genügen der Relation

$$s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} s_2 t_2 s_2^{-1} t_2^{-1} = 1.$$

Wir definieren nun einige Selbstabbildungen.

Wir schneiden aus der Fläche einen kleinen Zylinder mit S_1 als Meridian heraus, verdrehen Basiskreis und Deckkreis um 2π gegeneinander in der in Fig. 4 angegebenen Weise und fügen den Zylinder wieder ein. Die bewirkte Selbstabbildung nennen wir eine Torsion längs S_1 und bezeichnen sie mit τ_{S_1} , ebenso den induzierten Automorphismus.

Für den Automorphismus ergibt eine leichte, in Fig. 5 dargestellte Rechnung:

$$\tau_{S_1} = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_1 \\ t_1 \rightarrow t_1 \\ s_2 \rightarrow s_2 t_2^{-1} \\ t_2 \rightarrow t_2. \end{cases}$$

Analog definieren wir Flächenabbildungen τ_{S_i} für $i=2, 3$ und τ_{U_i} für $i=1, 2, 3$.

Sodann definieren wir an Hand der Fig. 6 eine Flächenabbildung wie folgt. Wir zerschneiden die Fläche in zwei berandete Tori und einen schmalen Zylinder mit der Kurve L_2 als Meridian. Sodann tordieren wir den Zylinder um π und setzen ihn wieder ein, nachdem wir vorher den rechten Torus um π gedreht haben. Die entstehende Flächenabbildung bezeichnen wir mit ω_2 .

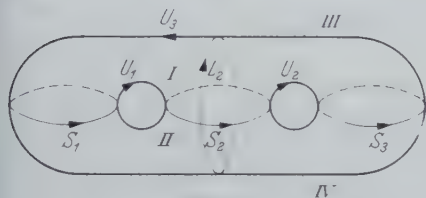


Fig. 1

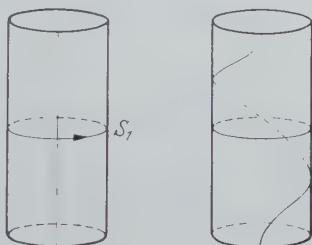


Fig. 4

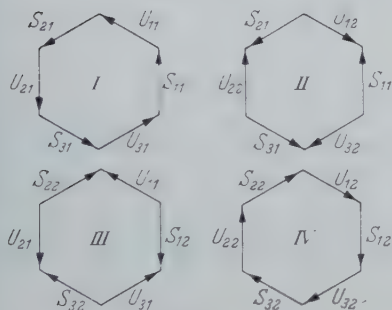


Fig. 2

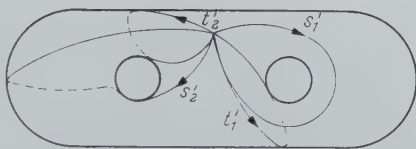


Fig. 5

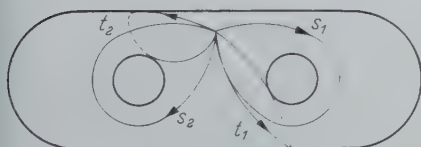


Fig. 3

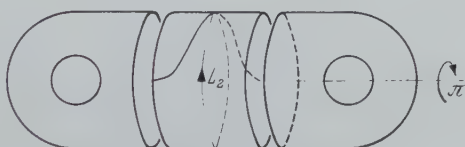


Fig. 6

Schließlich definieren wir einige Abbildungen, die das Schema der Fig. 2 insgesamt in sich überführen und die zusammen eine endliche Gruppe der Ordnung 48 erzeugen.

Die Abbildung α definieren wir im Schema der Fig. 2 durch

$$\alpha(I) = I, \quad \alpha(S_{11}) = S_{21}.$$

Man verifiziert ohne Mühe, daß sich diese Abbildung eindeutig zu einer inzi-derhalternden Abbildung des gesamten Schemas fortsetzen läßt. Sie läßt sich so beschreiben: alle Sechsecke werden jeweils um $\frac{2}{3}\pi$ gedreht. Für die Fläche bedeutet α eine zyklische Vertauschung der drei zu S_1, S_2, S_3 gehörigen Arme. Die Kurven U_i werden gleichfalls zyklisch vertauscht.

Die Abbildung β definieren wir so:

$$\beta(I) = III, \quad \beta(S_{11}) = S_{12}.$$

Auch diese Abbildung setzt sich eindeutig zu einer inzidenzerhaltenden Abbildung des ganzen Schemas fort. Das Schema wird an einer Geraden so gespiegelt, daß jeweils die Sechsecke I und III bzw. II und IV vertauscht werden. In der Fläche bedeutet β eine Vertauschung der zu S_2, S_3 gehörigen Arme, wobei der zu S_1 gehörige Arm festbleibt. Die Kurven U_1, U_2, U_3 gehen über in $U_3^{-1}, U_2^{-1}, U_1^{-1}$.

Die Abbildung γ ist bestimmt durch

$$\gamma(I) = I, \quad \gamma(S_{11}) = U_{21}.$$

Diese Vorschrift induziert folgende Abbildung des Schemas: I und IV werden jeweils um π gedreht, II und III werden ebenfalls um π gedreht und dann vertauscht. Um γ auf der Fläche zu deuten, denke man sich die Fläche der Fig. 1 in eine dreidimensionale Sphäre eingebettet. Dann vertauscht γ den Innenraum und den Außenraum. S_1, S_2, S_3 gehen über in U_2, U_3, U_1 und U_1, U_2, U_3 gehen über in S_3, S_1, S_2 .

Schließlich definieren wir die Abbildungen σ_i mit Hilfe der Fig. 1: σ_1 sei die Spiegelung an der Ebene der S_i , σ_2 die an der Ebene der U_i und σ_3 die an der Ebene von L_2 . Die Abbildungen σ_i kehren die Orientierung der Fläche um.

Die Berechnung der durch $\tau_{S_i}, \tau_{U_i}, \omega_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_i$ induzierten Automorphismen verläuft völlig analog der oben für τ_{S_i} durchgeführten Rechnung. Wir stellen hier die Ergebnisse zusammen. Man vgl. dazu GOERTZ [13], S. 252.

$$\alpha = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_2^{-1} s_1^{-1} \\ t_1 \rightarrow s_1 s_2 t_2^{-1} s_2^{-1} s_1^{-1} \\ s_2 \rightarrow s_1 \\ t_2 \rightarrow t_2^{-1} s_1 t_1 s_1^{-1}, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} s_1^{-1} \\ t_1 \rightarrow s_1 s_2 t_2 s_2^{-1} t_1^{-1} s_1^{-1} \\ s_2 \rightarrow s_1 s_2 \\ t_2 \rightarrow t_2, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} s_1 \rightarrow t_2^{-1} \\ t_1 \rightarrow t_2 s_2 t_2^{-1} \\ s_2 \rightarrow s_1 t_1 s_1^{-1} \\ t_2 \rightarrow s_1^{-1}, \end{cases} \quad \sigma_1 = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_1^{-1} \\ t_1 \rightarrow s_1 t_1 s_1^{-1} \\ s_2 \rightarrow s_2^{-1} \\ t_2 \rightarrow s_2 t_2 s_2^{-1}, \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} s_1 \rightarrow t_2^{-1} s_1 s_2 t_2 s_2^{-1} \\ t_1 \rightarrow s_2 t_2^{-1} s_2^{-1} t_1^{-1} s_2 t_2 s_2^{-1} \\ s_2 \rightarrow s_2 \\ t_2 \rightarrow t_2^{-1}, \end{cases} \quad \sigma_3 = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_2^{-1} \\ t_1 \rightarrow s_2 t_2 s_2^{-1} \\ s_2 \rightarrow s_1^{-1} \\ t_2 \rightarrow s_1 t_1 s_1^{-1}, \end{cases}$$

$$\tau_{S_1} = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_1 \\ t_1 \rightarrow t_1 \\ s_2 \rightarrow s_2 t_2^{-1} \\ t_2 \rightarrow t_2, \end{cases} \quad \tau_{U_2} = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_1 \\ t_1 \rightarrow t_1 s_1 \\ s_2 \rightarrow s_2 \\ t_2 \rightarrow t_2, \end{cases} \quad \omega_2 = \begin{cases} s_1 \rightarrow s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} s_1^{-1} \\ t_1 \rightarrow s_1 t_1^{-1} s_1^{-1} \\ s_2 \rightarrow s_2 \\ t_2 \rightarrow t_2. \end{cases}$$

Die τ_{S_i} und die τ_{U_i} hängen mit α zusammen vermöge der Relationen

$$\alpha^{-1} \tau_{U_i} \alpha = \tau_{U_{i-1}}, \quad \alpha^{-1} \tau_{S_i} \alpha = \tau_{S_{i-1}} \quad (i = 1, 2, 3; i - 1: \text{mod } 3).$$

BAER, GOERITZ und vor ihnen DEHN und NIELSEN haben bewiesen, daß die Abbildungen $\tau_{S_i}, \tau_{U_i}, \omega_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_j$ die Abbildungstypengruppe erzeugen. Wir verzichten hier auf einen eigenen Vollständigkeitsbeweis und beziehen uns auf diese Autoren.

3. Für unsere Zwecke ist die oben angegebene Form der Automorphismen nicht sehr geeignet. Wir bevorzugen die symmetrische Definition der Fundamentalgruppe:

$$(1) \quad a b c d a^{-1} b^{-1} c^{-1} d^{-1} = 1.$$

Der Zusammenhang zwischen a, b, c, d und s_1, t_1, s_2, t_2 wird hergestellt durch:

$$\begin{aligned} a &= t_1^{-1} s_2 t_2 & s_1 &= a b \\ b &= t_2^{-1} s_2^{-1} t_1 s_1, & t_1 &= c d a^{-1}. \\ c &= s_2 & s_2 &= c \\ d &= t_2 & t_2 &= d \end{aligned}$$

Wir rechnen die Automorphismen $\tau_S, \tau_U, \omega_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_j$ um auf die neuen Erzeugenden a, b, c, d . Das Ergebnis dieser elementaren Rechnung lautet:

$$\alpha = \begin{cases} a \rightarrow d c b \\ b \rightarrow b^{-1} c^{-1} d^{-1} c^{-1} b^{-1} a^{-1} \\ c \rightarrow a b \\ d \rightarrow c a^{-1}, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} a \rightarrow d c b c \\ b \rightarrow c^{-1} b^{-1} d^{-1} c^{-1} b^{-1} a^{-1} \\ c \rightarrow a b c \\ d \rightarrow d, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} a \rightarrow d a^{-1} b^{-1} a^{-1} \\ b \rightarrow a b a d^{-2} \\ c \rightarrow d c a^{-1} \\ d \rightarrow b^{-1} a^{-1}, \end{cases} \quad \sigma_1 = \begin{cases} a \rightarrow a c^{-2} \\ b \rightarrow c^2 a^{-1} b^{-1} a^{-1} \\ c \rightarrow c^{-1} \\ d \rightarrow c d c^{-1}, \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} a \rightarrow c a^{-1} c \\ b \rightarrow c^{-1} a b a c^{-1} \\ c \rightarrow c \\ d \rightarrow d^{-1}, \end{cases} \quad \sigma_3 = \begin{cases} a \rightarrow c a^{-1} b^{-1} a^{-1} \\ b \rightarrow a b a c^{-2} \\ c \rightarrow b^{-1} a^{-1} \\ d \rightarrow d c a^{-1}, \end{cases}$$

$$\tau_{S_1} = \begin{cases} a \rightarrow a d^{-1} \\ b \rightarrow d b \\ c \rightarrow c d^{-1} \\ d \rightarrow d, \end{cases} \quad \tau_{U_2} = \begin{cases} a \rightarrow b^{-1} \\ b \rightarrow b a b \\ c \rightarrow c \\ d \rightarrow d, \end{cases}$$

$$\omega_2 = \begin{cases} a \rightarrow d c a^{-1} c d \\ b \rightarrow d^{-1} c^{-1} b^{-1} c^{-1} d^{-1} \\ c \rightarrow c \\ d \rightarrow d. \end{cases}$$

4. Schneidet man die Fläche F_2 längs der in 3. definierten Kurven a, b, c, d auf, so entsteht ein gewisses Fundamentalpolygon mit dem Randweg $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$. Wir haben es in Fig. 7 dargestellt.

Für das weitere ziehen wir einen auf H. POINCARÉ zurückgehenden Gedanken heran. Er besagt folgendes: Die hyperbolische Ebene läßt eine Pflasterung mit regulären Achtecken zu. Dabei stoßen jeweils 8 Achtecke in einem Punkt zusammen. Zwei benachbarte Seiten eines Achtecks schließen also einen

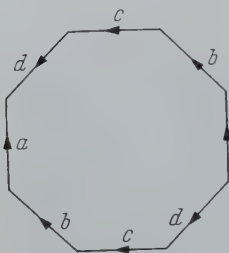


Fig. 7

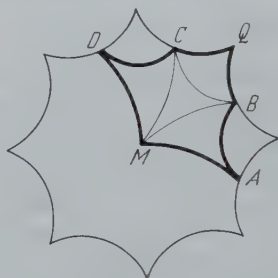


Fig. 8

Winkel von 45° ein; die Winkelsumme des Achtecks beträgt 360° .

Man kann nun diese Pflasterung auffassen als universelle Überlagerung der Fläche F_2 . Weiter kann man die Deckbewegungsgruppe, die zur Fundamentalgruppe isomorph ist, auffassen als eine Gruppe von hyperboli-

schen Bewegungen, die die Achteckspflasterung auf sich abbildet und einfach transitiv auf den Achtecken operiert. Der Kantenkomplex der Achteckspflasterung ist gerade das Cayley-Dehnsche Gruppenbild der Fundamentalgruppe.

Die Elemente der Deckbewegungsgruppe sind als hyperbolische Bewegungen sämtlich Schiebungen längs gewisser Achsen. Wir wollen den Isomorphismus zwischen der hyperbolischen Bewegungsgruppe und der Fundamentalgruppe explizit herstellen. Wir fassen dazu das Achteck der Fig. 7 auf als Grundachteck in der hyperbolischen Ebene. Dem Element a der Fundamentalgruppe ordnen wir die Schiebung zu, die das Grundachteck abbildet auf das ihm längs a rechts benachbarte. b wird die Schiebung zugeordnet, die auf das längs b links benachbarte Achteck führt, die c zugeordnete Schiebung führt auf das längs c rechts benachbarte Achteck und die d zugeordnete auf das längs d links angrenzende Achteck. Man bestätigt ohne Mühe, daß bei dieser Zuordnung dem Element $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$ die identische Schiebung entspricht, die zu einem einmaligen Umlauf um einen gewissen Eckpunkt des Grundachtecks gehört. Man vgl. im übrigen THRELFALL [21].

Wir wollen nun den Begriff der Punktspiegelung heranziehen. Man zerlege dazu entsprechend Fig. 8 das Grundachteck und die übrigen Achtecke in reguläre Dreiecke mit einer Winkelsumme von jeweils 135° und führe die Eckpunkte dieser Dreiecke ein. Die Bezeichnung ist durch Fig. 8 festgelegt.

Wir benutzen im folgenden die in der Spiegelungsgeometrie geläufige Terminologie, die bei BACHMANN [4], §3, 1—3 ausführlich begründet wird. Ein Punkt und die Spiegelung an diesem Punkt werden sprachlich nicht unterschieden. In diesem Sinne kann man z.B. von Produkten von Punkten sprechen.

Die in Fig. 8 eingeführten Punkte erzeugen eine gewisse hyperbolische Bewegungsgruppe $\mathfrak{P}$, die die Achteckspflasterung auf sich abbildet. Sie ist

Obergruppe der Deckbewegungsgruppe vom Index 2. Den Erzeugenden a, b, c, d entsprechen die Punktprodukte:

$$(2) \quad \begin{cases} a = MA \\ b = BM \\ c = MC \\ d = DM. \end{cases}$$

Setzt man diese Produkte in die Relation (1) ein, so erhält man

$$(MA BCD)^2 = 1.$$

Das Produkt $MA BCD$ ist also in der Punktspiegelungsgruppe involutorisch. In der hyperbolischen Ebene verifiziert man leicht, daß es in unserer Bezeichnungsweise der Punkt $Q^{CD} = DCQCD$ ist

Zwischen den Punkten M, A, B, Q, C, D besteht also die Spiegelungsgleichung

$$(3) \quad MABQCD = 1.$$

Wir wollen zeigen, daß die Relation (3) zusammen mit den Relationen

$$(4) \quad M^2 = A^2 = B^2 = Q^2 = C^2 = D^2 = 1$$

schon die Gruppe $\mathfrak{P}$ abstrakt definiert. Dazu genügt die leicht mit dem REIDEMEISTER-Verfahren zu bestätigende Bemerkung, daß die durch (3) und (4) abstrakt definierte Gruppe eine Untergruppe vom Index 2 besitzt, die



Fig. 9

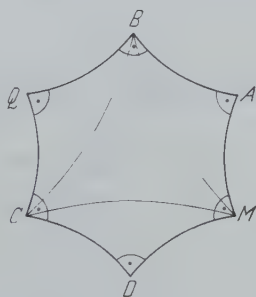


Fig. 10

aus allen geraden Produkten von Erzeugenden besteht und diese Gruppe von durch (2) zu erklärenden Elementen a, b, c, d erzeugt und durch die Relation (1) definiert wird.

Die Gl. (3) führt uns dazu, unsere unterteilte Pflasterung gemäß Fig. 9 aufzufassen als die Unterteilung einer Pflasterung mit Sechsecken. Grundsechseck sei das Sechseck $MABQCD$. Jeweils vier Sechsecke stoßen in einem Punkt zusammen.

Die vier in Fig. 9 dargestellten Sechsecke bilden einen Bereich, den man als Fundamentalbereich der Deckbewegungsgruppe auffassen kann. Dieser

Auffassung entspricht genau die in Fig. 2 durchgeführte Zerlegung der Fläche F_2 in vier Sechsecke.

In unserer Pflasterung erscheinen die Sechsecke irregulär. Das Grundsechseck hat nämlich abwechselnd Winkel von 45° und 135° . Wir wollen deshalb, entsprechend Fig. 10, zu einer regulären Pflasterung mit Sechsecken übergehen. Je zwei benachbarte Seiten eines Sechsecks bilden einen Winkel von 90° . In dieser Pflasterung ist die Spiegelungsgleichung (3) erfüllt.

Die Achtecke erscheinen in dieser Pflasterung irregulär. Im übrigen sind beide Pflasterungen bezüglich der Inzidenzen der Punkte und Geraden und Polygone isomorph.

Wir bemerken noch, daß die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ eine Dycksche Gruppe ist und daß die neue Pflasterung genau das zu dieser Gruppe gehörige Dycksche Gruppenbild ist.

5. Wir kehren nun zu den in 3. angegebenen Automorphismen zurück. Wir wollen zeigen, daß sich diese Automorphismen eindeutig zu Automorphismen von $\mathfrak{F}$ als Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}$ erwiesen. Da die Gruppe $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{P}$ charakteristisch ist, so ist die Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}$ sogar genau die ganze Automorphismengruppe von $\mathfrak{P}$.

Wir gehen so vor: Man fasse die Punkte des Grundsechsecks auf als Schnittpunkte je zweier Schiebungsachsen, bestimme die Bilder der Schiebungsachsen und ermittle deren Schnittpunkte. Diese Schnittpunkte sind die Bildpunkte bezüglich des Automorphismus.

Es zeigt sich nun, daß für alle in 3. angegebenen Automorphismen die Bilder der Schiebungsachsen stets Eckpunkte der Sechseckspflasterung verbinden und daß die Schnittpunkte Eckpunkte der Pflasterung sind. Wir geben das Ergebnis der beschriebenen Rechnung an:

$$\begin{aligned}\alpha &= \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & Q^{BM} & D^{CBM} & M^{CBM} & B^M & C^M \end{pmatrix}, \\ \beta &= \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D & B^C & A^{BC} & C^{ABC} & Q^C & M^D \end{pmatrix}, \\ \gamma &= \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ B^{AM} & D^{MABAM} & M^{DMABAM} & C^{QAM} & Q^{AM} & A^M \end{pmatrix}, \\ \sigma_1 &= \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M^{CM} & A^{CMCM} & B^{ACMCM} & Q^{BACMCM} & C^{MCM} & D^{CM} \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A^C & B^{AC} & Q^{BAC} & C & D^M \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ B^{AM} & C^{ABAM} & M^{CABAM} & D^{CABAM} & A^{BAM} & Q^{BAM} \end{pmatrix}, \\ \tau_{S_1} &= \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D & A^{MD} & B^{MD} & Q^{MD} & C^{MD} & M^D \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\tau_{U_3} = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & B & A^B & Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A^{QBA} & B^{QBA} & Q^{BA} & C & D \end{pmatrix}.$$

Die Potenzschreibweise ist so zu lesen: $Q^{BM} = MBQBM$.

Damit ist nun gezeigt:

Satz 1. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von $\tilde{\mathfrak{S}}$ stimmt überein mit der Automorphismengruppe der Obergruppe $\mathfrak{P}$.

Wir möchten den Satz 1 als eine Strukturaussage über die Abbildungstypengruppe verstehen. Deshalb werden wir zu Satz 1 ein Korollar formulieren. Wir benötigen dazu einen Hilfssatz.

Zunächst definieren wir den Automorphismus μ von $\tilde{\mathfrak{S}}$ durch

$$\mu = \begin{cases} a \rightarrow a^{-1} \\ b \rightarrow b^{-1} \\ c \rightarrow c^{-1} \\ d \rightarrow d^{-1}. \end{cases}$$

μ ist der von M in $\tilde{\mathfrak{S}}$ induzierte Automorphismus. In der Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ gilt $\mu = \sigma_1 \sigma_2$. Auf der Fläche F_2 bedeutet μ eine Drehung um π um die in Fig. 11 angegebene Achse.

Unser Hilfssatz lautet nun:

Hilfssatz 1. Notwendig und hinreichend für die Fortsetzbarkeit aller Automorphismen von $\tilde{\mathfrak{S}}$ zu Automorphismen der Obergruppe $\mathfrak{P}$ ist, daß die Abbildung μ im Zentrum der Abbildungstypengruppe liegt.

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß die Fundamentalgruppe ein triviales Zentrum hat. Man verifiziert diese Aussage leicht, indem man heranzieht, daß zwei Schiebungen dann und nur dann vertauschbar sind, wenn sie die gleiche Schiebungsachse haben.

Man kann also die Gruppe $\tilde{\mathfrak{S}}$ auffassen als Untergruppe ihrer Auto-

morphismengruppe $\mathfrak{A}$, indem man $\tilde{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{S}$ identifiziert. Die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ erscheint ebenfalls als Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Die Automorphismen aus $\mathfrak{A}$ erscheinen als Transformationen von $\tilde{\mathfrak{S}}$ mit Elementen aus $\mathfrak{A}$. Das zeigt, daß genau diejenigen Automorphismen von $\tilde{\mathfrak{S}}$, die mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind, auch Automorphismen von $\mathfrak{P}$ sind.

Formuliert man diese Aussage in der Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{S}}$, so ergibt sich, da das Bild von $\mathfrak{P}$ in dieser Faktorgruppe die Ordnung 2 hat, die Aussage des Hilfssatzes.

Vermittels des Hilfssatzes erhalten wir folgendes Korollar:

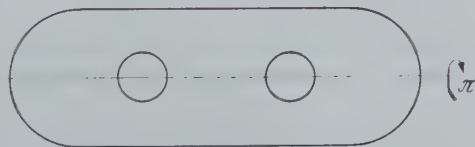


Fig. 11



Fig. 12

Korollar zu Satz 1. Die Abbildung μ liegt im Zentrum der Abbildungstypengruppe.

6. Wir wollen von dem in 5. angegebenen Erzeugendensystem zu einem einfacheren Erzeugendensystem übergehen. Wir ziehen dazu die besonders einfachen Automorphismen vom Typ τ_{U_i} heran. Wir nennen sie *Scherungen* und definieren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A & M^A & B & Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & B & A^B & Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A & Q & B^Q & C & D \end{pmatrix},$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A & B & C & Q^C & D \end{pmatrix},$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ M & A & B & Q & D & C^D \end{pmatrix}.$$

Der zu x_1 inverse Automorphismus ist

$$x_1^{-1} = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & M & B & Q & C & D \end{pmatrix};$$

entsprechendes gilt für die anderen x_i .

Weiter definieren wir:

$$z = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D & C & Q & B & A & M \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, daß x_i ($i=1, \dots, 5$) und z die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ erzeugen.

Wir schicken drei Bemerkungen voraus.

Wir definieren den Automorphismus y durch

$$y = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ A & B & Q & C & D & M \end{pmatrix}.$$

Wie die folgende in einem leicht verständlichen Schema zusammengestellte Rechnung zeigt, liegt y in der von den x_i erzeugten Gruppe.

Das Schema ist im Sinne der für die Automorphismen von $\mathfrak{B}$ benutzten Substitutionsschreibweise zu lesen.

$$\begin{array}{cccccc} M & A & B & Q & C & D \\ A & M^A & B & Q & C & D \\ A & B & M^{A^B} & Q & C & D \\ A & B & Q & M^{A^B Q} & C & D \\ A & B & Q & C & M^{A^B Q C} & D \\ A & B & Q & C & D & M^{A^B Q C D} = M. \end{array}$$

Weiter bemerken wir, daß die inneren Automorphismen von $\mathfrak{P}$ in der von den x_i erzeugten Gruppe liegen. Wir geben folgende Rechnung an:

$$\begin{array}{cccccc} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & M & B & Q & C & D \\ A^M & B^M & M & Q & C & D \\ A^M & B^M & Q^M & M & C & D \\ A^M & B^M & Q^M & C^M & M & D \\ A^M & B^M & Q^M & C^M & D^M & M. \end{array}$$

Zusammen mit der Bemerkung über γ folgt daraus, daß die inneren Automorphismen von den x_i erzeugt werden.

Schließlich bemerken wir noch, daß auch die Scherung

$$x_6 = \begin{pmatrix} M & A & B & Q & C & D \\ D^M & A & B & Q & C & M \end{pmatrix}$$

in der von den x_i ($i=1, \dots, 5$) erzeugten Gruppe liegt. Dazu führen wir folgende Rechnung durch:

$$\begin{array}{cccccc} M & A & B & Q & C & D \\ A & B & Q & C & D & M \\ A & B & Q & D^C & C & M \\ A & B & D^{CQ} & Q & C & M \\ A & D^{CQB} & B & Q & C & M \\ D^{CQBA} & A & B & Q & C & M. \end{array}$$

Wegen $MABQCD=1$ gilt $CQBA=DM$, also $D^{CQBA}=D^M$.

Wir zeigen jetzt, daß die x_i ($i=1, \dots, 5$) und z die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ erzeugen. Dazu müssen wir $\tau_{S_1}, \tau_{U_2}, \omega_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma_j$ durch x_i und z ausdrücken.

Wir führen die Rechnung für α durch. Wegen der Bemerkung über innere Automorphismen können wir den Exponenten M fortlassen. Wir stellen die Rechnung wieder in einem Schema zusammen.

$$\begin{array}{cccccc} M & A & B & Q & C & D \\ A^M & Q^{BM} & D^{CBM} & M^{CBM} & B^M & C^M \\ A & Q^B & D^{CB} & M^{CB} & B & C \\ A & Q^B & D^{CB} & B & M^C & C \\ A & Q^B & B & D^C & M^C & C \\ A & B & Q & D^C & M^C & C \\ A & B & Q & D^C & C & M \\ A & B & Q & C & D & M. \end{array}$$

Wegen der über y gemachten Bemerkung ist damit für α die Rechnung beendet. Für die anderen Erzeugenden verläuft die Rechnung völlig analog. Je nachdem, ob die Abbildung die Orientierung erhält oder nicht, erscheint am Schluß eine Potenz von y oder z und eine Potenz von y .

Damit ist gezeigt, daß x_i ($i=1, \dots, 5$) und z die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ erzeugen. Wie man leicht sieht, lassen sich x_2, x_3, x_4, x_5 durch x_1 und y ausdrücken:

$$y^j x_1 y^{-j} = x_{j+1} \quad (j=1, \dots, 4).$$

Also haben wir folgendes Ergebnis:

Satz 2. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ wird von den drei Elementen $x = x_1, y, z$ erzeugt. Die Elemente x, y erzeugen die Untergruppe $\mathfrak{A}^+$ der Automorphismengruppe vom Index 2, die zu den orientierungserhaltenden Abbildungen gehört.

Da wir die Scherungen x_i später benötigen, so formulieren wir über sie ein Korollar.

Korollar zu Satz 2. Die Scherungen x_i ($i=1, \dots, 6$) an den sechs Seiten des Grundsechsecks und die Spiegelung z an einer Symmetrieachse erzeugen die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$.

In Fig. 13 haben wir die Scherung x_1 am Grundsechseck dargestellt. Die inverse Scherung x_1^{-1} erfolgt auf der Geraden (A, M) zur anderen Seite.

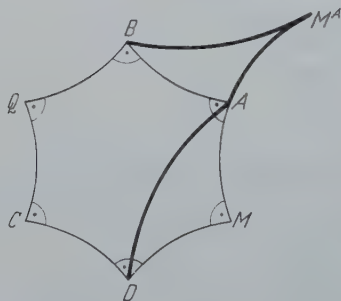


Fig. 13

7. Wir werden nun einige Betrachtungen in der hyperbolischen Ebene anstellen, die im Anschluß an das Korollar zu Satz 2 zu einer geometrischen Kennzeichnung der Automorphismen führen werden.

Wir definieren den Begriff der *Konvexität* eines Sechsecks in der hyperbolischen Ebene wie folgt. Jede Seite des Sechsecks bestimmt eine Gerade, auf der sie nämlich liegt. Diese Gerade zerlegt die hyperbolische Ebene in zwei Halbebenen. Ein Sechseck soll nun konvex heißen, wenn zu jeder Sechseckseite 4 Punkte des Sechsecks sämtlich in einer durch die Seite definierten Halbebene liegen.

Wir bemerken, daß das Grundsechseck konvex ist. Wir wollen zeigen, daß diese Eigenschaft bei Automorphismen erhalten bleibt.

Hilfssatz 2. Ein Automorphismus bildet das Grundsechseck ab auf ein gewisses Sechseck des Punktnetzes, das konvex ist.

Zum Beweis des Hilfssatzes 2 ziehen wir das Korollar zu Satz 2 heran. Zwischen das Grundsechseck und das Bildsechseck bezüglich eines Automorphismus läßt sich eine Folge von Sechsecken schalten, derart, daß je zwei aufeinanderfolgende Sechsecke durch eine Scherung auseinander hervorgehen. Eventuell muß an den Anfang der Folge die Spiegelung z treten.

Für z gilt der Hilfssatz 2. Wir haben ihn also vollständig bewiesen, wenn wir zeigen, daß er für eine Scherung gilt. Dazu genügt folgende Aussage:

Hilfssatz 3. *In einem konvexen Sechseck, in dem das Produkt der Ecken, in zyklischer Reihenfolge, die Identität ist, schneiden sich nichtbenachbarte Seiten nicht.*

Der Hilfssatz 3 stellt nämlich sicher, daß man auf ein konvexes Sechseck mit dem Eckenprodukt 1 Scherungen anwenden kann, ohne die Konvexität zu zerstören.

Wir beweisen nun den Hilfssatz 3. Es sei A, B, C, D, E, F ein konvexes Sechseck mit dem Eckenprodukt $ABCDEF = 1$. Die Geraden (A, B) und (C, D) mögen sich in Z schneiden (Fig. 14). Dann gibt es zu A, B, Z einen ebenfalls auf (A, B) liegenden Punkt Y derart, daß gilt

$$(5) \quad YZ = AB.$$

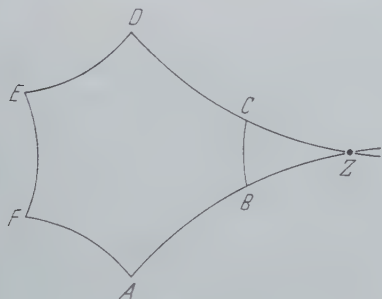


Fig. 14

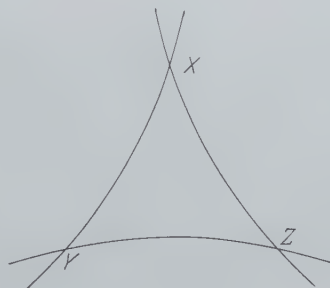


Fig. 15

Weiter gibt es zu D, C, Z einen ebenfalls auf (C, D) liegenden Punkt X mit

$$(6) \quad ZX = CD.$$

Man vgl. zu diesen beiden Aussagen BACHMANN [4], § 7, 1, Sätze S und S'.

Schließlich folgt aus $ABCDEF = 1$ und (5), (6) noch

$$(7) \quad XY = EF.$$

Daher liegen X und Y auch auf (E, F) (BACHMANN [4], § 7, 1, Satz U). Wir betrachten nun das von X, Y, Z aufgespannte Dreieck (Fig. 15). Die Geraden (X, Y) , (X, Z) , (Y, Z) sind Geraden des Sechsecks. E, F können nicht auf verschiedenen Seiten von (X, Z) liegen, wegen der Konvexität. Ebenso können E, F nicht auf verschiedenen Seiten von (Y, Z) liegen.

E, F können nicht beide zwischen X und Y liegen, da dann die Spiegelungsgleichung (7) nicht besteht.

Also: Wenn E, F auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X liegt, so liegen sie auch auf der Seite von (X, Z) , auf der Y nicht liegt und umgekehrt.

Den entsprechenden Schluß kann man für die anderen Paare vollziehen.

1. E, F, C, D mögen auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X liegt. Dann liegen E, F auch auf der Seite von (X, Z) , auf der Y nicht liegt. Dann müssen A, B wegen der Konvexität auf der Seite von (X, Z) liegen, auf der Y nicht liegt. Dann liegen A, B auf der Seite von (X, Y) , auf der Z liegt. Da aber

C, D auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X liegt, so liegen sie auf der Seite von (X, Y) , auf der Z nicht liegt. Also liegen A, B und C, D auf verschiedenen Seiten von (X, Y) , im Widerspruch zur Konvexität.

2. E, F, C, D mögen auf der Seite von (Y, Z) liegen, auf der X nicht liegt. Wir führen ein völlig analoges Schlußschema durch, indem wir in 1. die Aussagen „liegt“ und „liegt nicht“ vertauschen und gelangen wieder zu einem Widerspruch gegen die Konvexität. Damit ist bewiesen, daß der Schnittpunkt Z in Fig. 14 nicht existiert. Ebenso schneiden sich die Geraden (A, B) und (E, F) nicht. Daraus folgt, daß sich auch (A, B) und (E, D) nicht schneiden. Da die Gerade (A, B) nicht ausgezeichnet war, so gilt entsprechendes für die anderen Geraden. Damit ist der Beweis von Hilfssatz 3 und auch von Hilfssatz 2 beendet.

Wir bemerken noch, daß der Hilfssatz 2 ein Spezialfall eines Satzes von DEHN und NIELSEN ist. Es handelt sich um die Aussage, daß ein Automorphismus bei der Abbildung der Menge der Schiebungsachsen auf sich die Inzidenzen erhält. Man vgl. dazu NIELSEN [14], S. 239. In dem Grundsechseck schneiden sich nämlich die Sechsecksgeraden nur in den Ecken des Sechsecks, während in einem nicht-konvexen Sechseck weitere Schnittpunkte existieren.

8. Ein Automorphismus bildet ein Sechseck des Punktnetzes, welches das Eckenprodukt 1 hat, wieder ab auf ein solches Sechseck. Wir möchten die Eigenschaft eines konvexen Sechsecks, das Eckenprodukt 1 zu haben, konfiguratив verstehen.

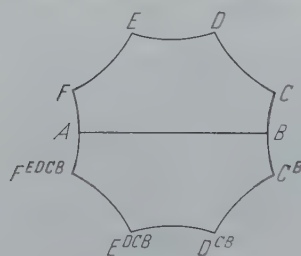


Fig. 16

Dazu betrachten wir ein konvexes Sechseck A, B, C, D, E, F mit $ABCDEF=1$ (Fig. 16). Wir definieren den Begriff des *Gegensechsecks*. Dazu zeichnen wir eine Kante (A, B) aus. Wir tragen auf der Geraden (C, B) die Strecke (C, B) von B aus nach unten ab. Der neue Punkt ist im Spiegelungskalkül C^B . Sodann tragen wir in C^B nach links unter dem zum Winkel $\sphericalangle(B, C, D)$ gehörigen Supplementwinkel die Strecke (C, D) an. Wir gelangen zum Punkte D^{CB} . Weiter gelangen wir mit den Strecken (E, D) und den entsprechenden Supplementwinkeln zu den Punkten E^{DCB} und F^{EDCB} . Fahren wir mit der Konstruktion fort, so schließt sich die Figur in A wegen $A^{FEDCB}=A$. Weiter gilt $F^{EDCB}=F^A$.

Das Sechseck $A, B, C^B, D^{CB}, E^{DCB}, F^{EDCB}$ hat also dieselben Seitenlängen wie A, B, C, D, E, F und die jeweiligen Supplementwinkel. Wir nennen dieses Sechseck das zu A, B, C, D, E, F gehörige *Gegensechseck*. Beginnen wir statt mit der Kante (A, B) mit einer anderen, so erhalten wir offenbar ein kongruentes Gegensechseck.

Wir bemerken noch, daß die Beziehung Sechseck — Gegensechseck eine reziproke ist: das Gegensechseck zum Gegensechseck ist das ursprüngliche Sechseck.

Wir formulieren nun mit Hilfe des Gegensechsecks die Eigenschaft, daß das Eckenprodukt 1 ist, als Schließungssatz.

Hilfssatz 4. Notwendig und hinreichend dafür, daß an einem konvexen Sechseck das Spiegelungsprodukt an den Ecken, in zyklischer Reihenfolge, die Identität ergibt, ist, daß sich das Gegensechseck mit denselben Seitenlängen und den jeweiligen Supplementwinkeln schließt.

Beweis. Daß das Kriterium notwendig ist, wurde bereits gezeigt. Um zu zeigen, daß es auch hinreichend ist, hat man offenbar nur zu zeigen, daß aus $A^{FEDCB} = A$ und $F^{EDCB} = F^A$ folgt $ABCDEF = 1$. Die beiden obigen Bedingungen kann man auch so schreiben:

$$A^{FEDCBA} = A,$$

$$F^{FEDCBA} = F.$$

Die eigentliche hyperbolische Bewegung $FEDCBA$ hat also zwei verschiedene Fixpunkte. Also ist sie die Identität. Damit gilt auch $ABCDEF = 1$ und der Hilfssatz 4 ist bewiesen.

Wir zeigen nun, daß das Gegensechseck eines konvexen Sechsecks ebenfalls konvex ist. Dazu können wir uns aus Symmetriegründen auf den Nachweis beschränken, daß in Fig. 16 die Punkte C^B und D^{CB} auf der Seite von (A, B) liegen, auf der C, D, E, F nicht liegen. Da D^C auf (D, C) liegt, gehört wegen Hilfssatz 3 auch D^C zu der durch C bestimmten Seite von (A, B) . Folglich liegen die Spiegelpunkte C^B und D^{CB} auf der anderen Seite.

Das Sechseck und das Gegensechseck bilden also zusammen ein konvexes Achteck. Der Flächeninhalt dieses Achtecks ist, wegen der Supplementwinkel des Gegensechsecks, unabhängig von der speziellen Gestalt des Sechsecks und beträgt 2π . Diese letzte Bemerkung führt uns nun zu einer konfigurativen Kennzeichnung der Automorphismen.

Satz 3. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Sechseck des Punktnetzes als Bild des Grundsechsecks einen Automorphismus definiert, ist folgendes:

1. *das Produkt der Spiegelungen an den Ecken des Sechsecks, in zyklischer Reihenfolge, ist die Identität;*
2. *das Sechseck ist konvex.*

Zwei Sechsecke, die vermöge von Bewegungen aus der Punktspiegelungsgruppe kongruent sind, führen zu Automorphismen, die sich nur um einen inneren Automorphismus unterscheiden.

Beweis zu Satz 3. Daß das in Satz 3 ausgesprochene Kriterium notwendig ist, wurde bereits gezeigt. Wir wollen beweisen, daß es auch hinreichend ist.

Das Sechseck bildet zusammen mit seinem Gegensechseck ein konvexes Achteck mit dem Flächeninhalt 2π . Mit diesen Achtecken können wir die hyperbolische Ebene pflastern. Wir bleiben dabei ganz auf dem Punktnetz. Wir haben also eine Abbildung des Punktnetzes in sich hergestellt, die ein Isomorphismus der Punktgruppe in sich ist. Zu zeigen ist noch, daß dieser Isomorphismus nicht die Punktgruppe abbildet auf eine echte Untergruppe.

Wenn ein echter Isomorphismus in die Punktgruppe vorliegt, so gibt es mindestens einen Punkt, der im Innern des Achtecks liegt. Der zur Pflasterung mit den Achtecken gehörige Fundamentalbereich ist gleichzeitig Deckbereich der Punktgruppe $\mathfrak{P}$. Da er einen Punkt des Netzes im Innern enthält, so muß er mindestens zwei Fundamentalbereiche der Punktspiegelungsgruppe umfassen. Dem widerspricht die Tatsache, daß das Achteck einen Flächeninhalt 2π hat. Also fällt die Pflasterung mit Achtecken mit dem Punktnetz zusammen.

Die in Satz 3 ausgesprochene Bemerkung über kongruente Sechsecke ist evident. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

9. Wir greifen nun auf Abschnitt 6 zurück. Die dort angegebenen Schemata zur Umrechnung von Erzeugenden der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ sind ihrer Struktur nach mit Artinschen Zöpfen verwandt.

Wir wollen diesen Zusammenhang präzisieren und betrachten die Zopfgruppe mit sechs Fäden.

Die Zopfgruppe läßt sich nach ARTIN [1] treu darstellen als eine Gruppe von Automorphismen der freien Gruppe. Den Erzeugenden, die geometrisch Überkreuzungen oder Unterkreuzungen zweier benachbarter Fäden sind, entsprechen die Substitutionen

$$(8) \quad x'_i = \begin{pmatrix} t_v & t_i & t_{i+1} \\ t_v & t_{i+1} & t_{i+1}^{-1} t_i t_{i+1} \end{pmatrix}; \quad (v = 1, \dots, 6; v \neq i, i+1) \\ (i = 1, \dots, 5).$$

Die t_i ($i = 1, \dots, 6$) erzeugen eine freie Gruppe vom Rang 6. Die Substitutionen x'_i genügen den Relationen

$$(9) \quad \begin{cases} x'_i x'_k = x'_k x'_i; & (|i - k| \geq 2; i, k = 1, \dots, 5) \\ x'_{i+1} x'_i x'_{i+1} = x'_i x'_{i+1} x'_i; & (i = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

Die Relationen (9) definieren die Zopfgruppe als abstrakte Gruppe. Ein Vergleich der Erzeugenden x'_i der Zopfgruppe und der Erzeugenden x_i der Gruppe $\mathfrak{A}^+$ der zu den orientierungserhaltenden Abbildungen gehörigen Automorphismen führt zu der Aussage:

Hilfssatz 5. *Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ ist homomorphes Bild der Zopfgruppe mit sechs Fäden.*

Beweis. Der Homomorphismus wird durch die Zuordnung von x_i zu x'_i ($i = 1, \dots, 5$) hergestellt. Wir haben nur zu prüfen, ob die x_i auch dem Relationensystem (9) genügen. Davon überzeugt aber eine leichte Rechnung, die wir hier übergehen können. Damit ist der Hilfssatz 5 bewiesen.

Wir wollen nun den Kern des Homomorphismus zwischen der Zopfgruppe und der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}^+$ bestimmen. Der Homomorphismus ist dadurch gekennzeichnet, daß gewissen in der Zopfgruppe von der Identität verschiedenen Substitutionen der identische Automorphismus in $\mathfrak{A}^+$ entspricht. Sollen gewisse in der Zopfgruppe von 1 verschiedene Substitutionen gleich der Identität werden, so impliziert dies gewisse Relationen zwischen den Elementen t_i .

Durch eine leichte Rechnung erhält man in der Zopfgruppe:

$$X = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 x'_5 = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_1^R \end{pmatrix}; \quad R = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$$

und

$$X^i = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i^R \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \dots, 6).$$

In der Automorphismengruppe $\mathfrak{U}^+$ entspricht X^i der identische Automorphismus. Das impliziert die Relationen

$$(10) \quad t_i^R = t_i \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Weiter folgt

$$Y = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 x_5'^2 x'_4 x'_3 x'_2 x'_1 = \begin{pmatrix} t_1 & t_j \\ t_1^R & t_j^{R-1} t_1^R \end{pmatrix}; \quad (j = 2, \dots, 6)$$

und

$$Y^2 = \begin{pmatrix} t_1 & t_j \\ t_1^{R^2} & t_j^{R-1} t_1 R^{-1} t_1 R^2 \end{pmatrix}; \quad (j = 2, \dots, 6).$$

In $\mathfrak{U}^+$ entspricht Y^2 ebenfalls der identische Automorphismus. Daraus folgt in Verbindung mit (10):

$$(11) \quad t_i^2 = t_i, \quad (i = 1, \dots, 6)$$

entsprechend folgt aus $X^\nu Y^2 X^{-\nu}$

$$(12) \quad t_i^{\nu+1} = t_i, \quad (i = 1, \dots, 6; \nu = 1, \dots, 5).$$

Nun sind Substitutionsgruppen vom Typ der durch (8) erzeugten Gruppe über Gruppen mit isomorphen Zentrumsfaktorgruppen isomorph.

Die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ besitzt nur ein triviales Zentrum. Diese Aussage sieht man leicht in der hyperbolischen Ebene ein: Eine Bewegung aus dem Zentrum müßte mit zwei verschiedenen Punkten A, B vertauschbar sein, diese also zu Fixpunkten haben; also muß sie die Identität sein.

Also haben die durch (10), (11), (12) definierte Gruppe und die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ isomorphe Zentrumsfaktorgruppen. Also sind die auf ihnen durch die Substitutionen vom Typ (8) erzeugten Substitutionsgruppen isomorph.

Wir formulieren das Ergebnis.

Satz 4. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{U}^+$ wird als abstrakte Gruppe definiert durch die Relationen

$$(13) \quad x_i x_k = x_k x_i, \quad (|i - k| \geq 2; i, k = 1, \dots, 5),$$

$$(14) \quad x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_i x_{i+1} x_i, \quad (i = 1, \dots, 4),$$

$$(15) \quad (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^6 = 1,$$

$$(16) \quad (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 x_4 x_3 x_2 x_1)^2 = 1.$$

Der Übergang von $\mathfrak{A}^+$ zu $\mathfrak{A}$ ist eine zerfallende Erweiterung; Vertretergruppe ist $(1, z)$. Die Erweiterung ist durch den von z in $\mathfrak{A}^+$ induzierten Automorphismus vollständig bestimmt.

Wir wollen die Zöpfe, zu denen der identische Automorphismus gehört, noch geometrisch erläutern.

Zur Relation (15) gehört der Toruszopf mit der Verdrillingszahl 6. Zur Relation (16) gehört ein Zopf, bei dem ein Faden zweimal um die fünf anderen geschlungen ist. Wir haben beide Zöpfe in Fig. 17 und Fig. 18 dargestellt.

Der von den Zöpfen der Fig. 17 und der Fig. 18 erzeugte Normalteiler ist der Kern des in Hilfssatz 5 ausgesprochenen Homomorphismus.

10. Im folgenden Abschnitt wollen wir zeigen, daß man unsere Methode nicht direkt auf Flächen höheren Geschlechts übertragen kann. Unsere Methode der Fortsetzung der Automorphismen auf eine von Punktspiegelungen erzeugte Gruppe beruht auf der in Abschnitt 5. ausgesprochenen Eigenschaft

der dort definierten Abbildung μ , im Zentrum der Abbildungstypengruppe zu liegen. Die Abbildung μ wurde induziert durch den Automorphismus

$$\mu = \begin{cases} a \rightarrow a^{-1} \\ b \rightarrow b^{-1} \\ c \rightarrow c^{-1} \\ d \rightarrow d^{-1} \end{cases}$$

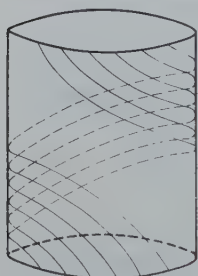


Fig. 17

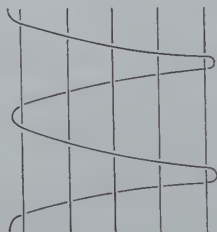


Fig. 18

Für eine entsprechend zu definierende Abbildung μ' einer Fläche höheren Geschlechts geht nun die Zentrumseigenschaft verloren.

Wir wollen das am Beispiel der Fläche vom Geschlecht 3 erläutern. Die Fundamentalgruppe dieser Fläche wird definiert durch die Relation

$$a b c d e f a^{-1} b^{-1} c^{-1} d^{-1} e^{-1} f^{-1} = 1.$$

Wir betrachten die durch den Automorphismus

$$\mu' = \begin{cases} a \rightarrow a^{-1} \\ b \rightarrow b^{-1} \\ c \rightarrow c^{-1} \\ d \rightarrow d^{-1} \\ e \rightarrow e^{-1} \\ f \rightarrow f^{-1} \end{cases}$$

induzierte Abbildung μ' und zeigen, daß sie nicht im Zentrum der Abbildungstypengruppe liegt.

Berechnen wir zu dem Automorphismus

$$\delta = \begin{cases} a \rightarrow a d e f \\ b \rightarrow f^{-1} e^{-1} d^{-1} b \\ c \rightarrow c d e f \\ d \rightarrow d \\ e \rightarrow e \\ f \rightarrow f \end{cases}$$

den Kommutator

$$\delta \mu' \delta^{-1} \mu'^{-1} = \begin{cases} a \rightarrow d^{-1} e^{-1} f^{-1} a d e f \\ b \rightarrow f^{-1} e^{-1} d^{-1} b f e d \\ c \rightarrow d^{-1} e^{-1} f^{-1} c d e f \\ d \rightarrow d \\ e \rightarrow e \\ f \rightarrow f, \end{cases}$$

so erkennen wir, daß $\delta \mu' \delta^{-1} \mu'^{-1}$ kein innerer Automorphismus ist. Aus der Isomorphie des Abschnitts 1. entnehmen wir, daß der Abbildungstypus δ mit dem Abbildungstypus μ' nicht vertauschbar ist.

Wir bemerken noch, daß man die Abbildung μ' entsprechend der in Abschnitt 5. für μ gegebenen geometrischen Interpretation auffassen kann als Drehung eines zu Fig. 1 analogen Schemas um eine Symmetrieachse. Aus dieser Bemerkung verifiziert man auch geometrisch, daß μ' nicht im Zentrum der Abbildungstypengruppe liegt.

11. Anhang.

Wir stellen in diesem Anhang einige zahlentheoretische Überlegungen an, aus denen wir aber keine Schlüsse über die Struktur der Abbildungstypengruppe ziehen.

Da sie aber insbesondere zu einer orthogonalen Darstellung der Fundamentalgruppe über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen führen, die unseres Wissens bisher nicht bekannt ist, so haben sie im Anschluß an die vorliegende Arbeit ein gewisses selbständiges Interesse und ihre Wiedergabe in einer kurzen Form mag hier gerechtfertigt erscheinen.

Wir gehen aus von dem in Fig. 10 dargestellten Grundsechseck des Punktnetzes. Wie eine leichte Rechnung zeigt, hat für dieses Grundsechseck der Kosinus der Seitenlänge den Wert 2.

Diese Bemerkung führt uns zu folgender Frage: Ist es möglich, eine Einlagerung der hyperbolischen Ebene in die projektive Ebene so zu definieren, d.h. für den absoluten Kegelschnitt eine quadratische Form so zu finden, daß man den Punkten des Grundsechsecks rationale Koordinaten zuordnen kann? Wenn das geht, so haben offenbar wegen der Spiegelungsformel

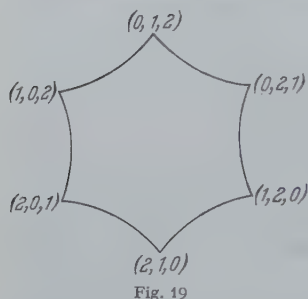
$$(17) \quad r^* = -r + 2 \frac{f(r, a)}{f(a, a)} a$$

alle Punkte des Netzes rationale Koordinaten.

Man kann nun in der Tat eine geeignete quadratische Form finden. Wir geben die Form und die projektiven Koordinaten der Grundpunkte an. Die Form lautet:

$$(18) \quad f(r, r) = -\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}(xy + xz + yz).$$

Die Koordinaten der Grundpunkte entnimmt man der Fig. 19.



Die projektiven Koordinaten der Grundpunkte sind auf den Formwert

$$(19) \quad f(r, r) = 1$$

normiert. Natürlich normiert (19) die Koordinaten nur bis auf ein gemeinsames Vorzeichen.

Man bemerkt, daß aus (19) folgt

$$x + y + z \equiv 0 \pmod{3}.$$

Daraus folgt, daß die Bilinearform $f(r, a)$ in der Spiegelungsformel (17) für die Grundpunkte eine Linearform in r mit ganzrationalen Koeffizienten ist.

Also haben wegen der Normierung (19) auch die durch Spiegelung aus den Grundpunkten hervorgehenden Punkte und damit alle Netzpunkte ganzrationale Koordinaten und den Formwert 1.

Aus der Bemerkung über die Linearform $f(r, a)$ für die Grundpunkte folgt nach (17), daß die zu den Spiegelungen an den Grundpunkten gehörigen orthogonalen Matrizen ganzzahlig sind. Wir haben also eine treue orthogonale Darstellung zur Form (18) über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen für die Punktspiegelungsgruppe $\mathfrak{P}$ und damit auch für die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ gewonnen. Zieht man noch heran, daß die Fundamentalgruppen der Flächen höheren Geschlechts als Fundamentalgruppen von Überlagerungen sämtlich Untergruppen der zum Geschlecht 2 gehörigen Fundamentalgruppe sind, so hat man also folgende Aussage:

Satz. Die Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche beliebigen Geschlechts gestattet eine treue orthogonale Darstellung zur Form (18) über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen.

Wir bemerken noch ohne Beweis, daß die Gesamtheit der Punkte mit ganzrationalen Koordinatentripeln, für die (19) gilt, gerade mit dem Punktnetz übereinstimmt.

Literatur

ARTIN, E.:

- [1] Theorie der Zöpfe. Hamb. Abh. **4**, 47–72 (1926).
- [2] Theory of Braids. Ann. of Math. (2), **48**, 101–126 (1947).
- [3] Braids and Permutations. Ann. of Math. (2) **48**, 643–649 (1947).

BACHMANN, F.:

- [4] Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Heidelberg: Springer 1959.

BAER, R.:

- [5] Kurventypen auf Flächen. J. reine u. angew. Math. **156**, 231—246 (1927).
- [6] Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen. J. reine u. angew. Math. **159**, 101—116 (1928).
- [7] Die Abbildungstypengruppe der orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht 2. J. reine u. angew. Math. **160**, 1—25 (1929).

BOHNENBLUST, F.:

- [8] The Algebraical Braid Group. Ann. of Math. (2) **48**, 127—136 (1947).

BURNSIDE, W

- [9] Theory of Groups of Finite Order, 2nd ed. Cambridge 1911.

COXETER, H. S. M., and W. O. J. MOSER:

- [10] Generators and Relations for Discrete Groups. Ergebn. d. Math. (N.F.) **14** (1957).

DEHN, M.:

- [11] Über Kurvensysteme auf zweiseitigen Flächen mit Anwendung auf das Abbildungsproblem, Autogr. Vortrag im Math. Colloquium Breslau, 11. Febr. 1922.

GOERTZ, L.:

- [12] Normalformen der Systeme einfacher Kurven auf orientierbaren Flächen. Hamb. Abh. **9**, 223—243 (1933).
- [13] Die Abbildungen der Brezelflächen und der Vollbrezel vom Geschlecht 2. Hamb. Abh. **9**, 244—259 (1933).

NIELSEN, J.:

- [14] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. Acta Math. **50**, 189—358 (1927).
- [15] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. II. Acta Math. **53**, 1—76 (1929).
- [16] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. III. Acta Math. **58**, 87—167 (1932).
- [17] Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen. Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat.-fys. Medd. **15**, 1 (1937).

REIDEMEISTER, K.:

- [18] Topologie der Polyeder. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1953.
- [19] Über die Automorphismen von Wegegruppen. J. reine u. angew. Math. **167**, 79—87 (1932).

SEIFERT, H., u. W. THRELFALL:

- [20] Lehrbuch der Topologie. New York: Chelsea Publ. Comp. 1947.

THRELFALL, W.:

- [21] Gruppenbilder. Abh. Sächs. Akad. Wissensch., Math.-physik. Kl. **41**, Nr. 6, 1—59 (1932).

*Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule
(Eingegangen am 3. Februar 1960)*

Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. I

Von

FRIEDRICH WILHELM SCHÄFKE

Inhaltsübersicht

Teil I

Einleitung	436
1. Elementare Hilfssätze	438
2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern	444
3. Anwendung auf die Hillsche Differentialgleichung	458

Teil II

4. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}(z)$, n ganz
5. Reihenentwicklungen nach Bessel-Funktionen $J_{\nu+n}((\nu+n)z)$, n ganz
6. Reihenentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen $M_{\kappa, \nu+n}(z)$, n ganz
7. Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen

Einleitung

Die vorliegende Arbeit soll eine zusammenfassende Darstellung und ausführliche Herleitung der Resultate geben, die ich zu einem Teil in dem gemeinsam mit Herrn J. MEIXNER verfaßten Werk über Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen¹⁾ dargestellt und zu einem anderen Teil in Vorträgen auf der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in Mainz 1953, auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Amsterdam 1954 und auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Berlin 1955 angegeben habe. Darüber hinaus werden zahlreiche neue Überlegungen bezüglich der im Titel genannten Reihenentwicklungen hier erstmals vorgelegt.

In den Abschnitten 1, 2 wird die l.c.¹⁾ im Abschnitt 1.7, S. 82—89 skizzierte Theorie mit vollständiger Durchführung der Beweise gegeben. Dabei erwies es sich als vorteilhaft, die zugrunde gelegten Voraussetzungen etwas zu modifizieren. Der interessierte Leser wird bei einem ersten Vergleich die Vorzüge der neuen Darstellung sofort erkennen, so daß hier eine entsprechende längere Erörterung unterbleiben kann. Weiter wird unter anderem eine Ergänzung der Theorie in der Richtung gegeben, daß der in l.c.¹⁾, S. 128 dem Leser überlassene Teil des Beweises des Entwicklungssatzes für Mathieusche Funktionen hier vollständig vorliegt.

¹⁾ MEIXNER, J., u. F. W. SCHÄFKE: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — In Zitaten kürzen wir ab: MS.

Ausdrücklich muß bemerkt werden, daß für die gegebene Theorie nicht eine größtmögliche Allgemeinheit angestrebt wurde. Auch ist eine Bezugnahme auf neuere Entwicklungen der Theorie der linearen topologischen Räume hier vermieden worden, obwohl die Neufassung der Voraussetzungen dazu anregt. Die Theorie wurde gerade so angelegt, daß die Bezeichnungen einfach werden, die Beweise durchsichtig erscheinen und die Anwendung auf die geschilderten Typen spezieller Reihenentwicklungen möglichst leicht ist.

Schon in meinem oben erwähnten Vortrage 1955 habe ich darauf hingewiesen, daß die in 1, 2 dargestellte Theorie ein sehr allgemeines Entwicklungstheorem für die Hillsche Differentialgleichung umfaßt. Diese Überlegungen werden im Abschnitt 3 ausführlich dargestellt. Dabei findet auch der Fall eines ganzen charakteristischen Exponenten Berücksichtigung, vor allem im Sinne der oben erwähnten Ergänzung des Beweises des Entwicklungssatzes für Mathiesche Funktionen.

Die einfachste Anwendung der Theorie auf spezielle Funktionen der mathematischen Physik, nämlich die auf die Bessel-Funktionen, gibt Abschnitt 4. Im Gegensatz zu den Entwicklungen von NEUMANN und GEGENBAUER, die den Potenzreihentyp darstellen, handelt es sich hier und analog in den folgenden Abschnitten um Entwicklungen vom Typ einer Laurent-Reihe. Die Fruchtbarkeit der geschilderten Methode wird an einer Reihe von neuen Resultaten und neuen einfachen Beweisen bekannter Ergebnisse sichtbar. Hingewiesen sei besonders auf den einfachen Zugang zu den von NEUMANN und GEGENBAUER eingeführten Polynomen O_n und $A_{n,r}$. Neu ist ferner die Darstellung des Falles $r=0$ als Grenzfall.

Das oben Gesagte gilt entsprechend für die Theorie der KAPTEYNschen Reihen bzw. ihrer Verallgemeinerungen, die der Abschnitt 5 gibt. Auch hier finden sich zahlreiche neue Resultate.

In 6 werden die Reihenentwicklungen nach Whittakerschen Funktionen untersucht. Es ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung und Ergänzung der diesbezüglichen Überlegungen von Herrn ERDELYI.

Abschnitt 7 schließlich bringt die Theorie der Entwicklungen nach Kugelfunktionen.

Die Entwicklungssätze für Mathiesche Funktionen und für Sphäroidfunktionen werden hier nicht noch einmal notiert bzw. hergeleitet. Deswegen darf jetzt auf die Darstellung in dem unter 1) genannten Buche verwiesen werden.

Vermerkt sei noch, daß unsere Theorie in jedem Falle neben den Reihenentwicklungen auch gewisse asymptotische Aussagen bezüglich großer Indizes liefert.

Abschließend muß auf eine Lücke hingewiesen werden, die bewußt gelassen wurde: es fehlt hier ein vollständiger Überblick über die historische Entwicklung des gesamten Fragenkomplexes. Die gegebenen Zitate können dies nicht ersetzen. Ich darf bezüglich eines derartigen Überblicks auf eine spätere Note verweisen.

1. Elementare Hilfssätze

HILFSSATZ 1. Seien

 $a, b, c_m^* (m = 0, 1, 2, \dots)$ reelle Zahlen,

$$b + 1 > a > b > 0,$$

$$|c_m^*| < \frac{1}{2}(a - b)(a + b), \quad |c_m^*| < \frac{1}{2}(1 - a + b)(a + b);$$

 k durchlaufe die natürlichen Zahlen.Dann gilt²⁾

$$\sum_{m=0}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} = O\left(\frac{1}{k} \log k\right).$$

BEWEIS. Wir zerlegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} = \sum_{m=0}^k + \sum_{m=k+1}^{2k} + \sum_{m=2k+1}^{\infty}.$$

Man hat dann

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} &< 2 \sum_{m=0}^k [(k-m+a-b)(k+m+a+b)]^{-1} \\ &\leq 2 \sum_{l=0}^k [(l+a-b)(2k-l+a+b)]^{-1} \\ &< \frac{2}{k+a+b} \sum_{l=0}^k (l+a-b)^{-1} \\ &= O\left(\frac{1}{k} \log k\right). \end{aligned}$$

Weiter wird

$$\begin{aligned} \sum_{m=k+1}^{2k} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} &< 2 \sum_{m=k+1}^{2k} [(m-k-a+b)(m+k+a+b)]^{-1} \\ &\leq 2 \sum_{l=1}^k [(l-a+b)(l+2k+a+b)]^{-1} \\ &< \frac{2}{2k+a+b} \sum_{l=1}^k (l-a+b)^{-1} \\ &= O\left(\frac{1}{k} \log k\right). \end{aligned}$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{m=2k+1}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1} &< 2 \sum_{m=2k+1}^{\infty} [(m-k-a+b)(m+k+a+b)]^{-1} \\ &< 2 \sum_{l=k+1}^{\infty} [(l-a+b)(l+a+b)]^{-1} \\ &= O\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

²⁾ Wie Beispiele zeigen, nicht zu $o\left(\frac{1}{k} \log k\right)$ verbesserungsfähig.

HILFSSATZ 2. Seien

λ_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) komplexe Zahlen,

$$\frac{\lambda_n}{n^2} \rightarrow \xi > 0 \quad (n \rightarrow \pm \infty).$$

Dann ist

$$S_2(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-2}$$

für $\lambda \neq \lambda_n$ konvergent. Es gilt

$$S_2(\lambda) \rightarrow 0 \quad (\text{Im } \lambda \rightarrow \pm \infty)$$

gleichmäßig für

$$\text{Re } \lambda \leq \eta < \infty.$$

BEWEIS. Die erste Aussage ist trivial, da die Reihenglieder offenbar $O(n^{-4})$ sind.

Für die zweite Aussage zerlegen wir

$$S_2(\lambda) = \sum_n = \sum_{\text{Re } \lambda_n \leq \eta} + \sum_{\text{Re } \lambda_n > \eta}.$$

Hier enthält wegen

$$\frac{\text{Re } \lambda_n}{n^2} \rightarrow \xi > 0 \quad (n \rightarrow \pm \infty)$$

die erste Summe höchstens endlich viele Glieder, strebt also gegen 0 für $\lambda \rightarrow \infty$. Die zweite Summe kann nun für $\text{Re } \lambda \leq \eta$ zerlegt und abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Re } \lambda_n > \eta} |\lambda - \lambda_n|^{-2} &\leq \sum_{\text{Re } \lambda_n > \eta} [(\text{Re } \lambda_n - \eta)^2 + (\text{Im } \lambda - \text{Im } \lambda_n)^2]^{-1} \\ &\leq \sum_{\text{Re } \lambda_n > \zeta} (\text{Re } \lambda_n - \eta)^{-2} + \sum_{\zeta \leq \text{Re } \lambda_n > \eta} [(\text{Re } \lambda_n - \eta)^2 + (\text{Im } \lambda - \text{Im } \lambda_n)^2]^{-1}. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile kann die erste Summe rechts unabhängig von λ beliebig klein gemacht werden durch hinreichend große Wahl von ζ ; die Reihenglieder sind ja $O(1/n^4)$. Die zweite Summe rechts enthält dann nur endlich viele Glieder, die gegen 0 streben für $\text{Im } \lambda \rightarrow \pm \infty$.

HILFSSATZ 3. Seien

λ_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) verschiedene komplexe Zahlen,

c_n, ϑ komplexe Zahlen, ϑ nicht ganz,

$$\lambda_n = n(n + \vartheta) + c_n, \quad |c_n| \leq c < \infty, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$S_2(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-2}.$$

Dann gilt:

(1) für

$$\kappa \neq \text{Re } \lambda_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ist

$$\int_{\operatorname{Re} \lambda = \kappa} S_2(\lambda) |d\lambda| = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\kappa - \operatorname{Re} \lambda_n|^{-1};$$

(2) für

$$d_n = \min_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|$$

ist

$$d_n \geq d \cdot (|n| + 1) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $d > 0$;

(3) auf dem Kreise

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

ist gleichmäßig

$$S_2(\lambda) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \pm \infty).$$

BEWEIS. Zu (1): Indem man $\operatorname{Im} \lambda - \operatorname{Im} \lambda_n = \sigma$ einführt, wird

$$\int_{\operatorname{Re} \lambda = \kappa} |\lambda - \lambda_n|^{-2} |d\lambda| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2 + (\kappa - \operatorname{Re} \lambda_n)^2} = \frac{\pi}{|\kappa - \operatorname{Re} \lambda_n|}.$$

Wegen

$$\operatorname{Re} \lambda_n = n(n + \operatorname{Re} \vartheta) + \operatorname{Re} c_n$$

ist

$$\frac{\pi}{|\kappa - \operatorname{Re} \lambda_n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \pm \infty).$$

Also ist die Reihe der Integrale (mit positiven Integranden) konvergent und gliedweise Integration erlaubt.

Zu (2) und (3): Wir zeigen zunächst

$$(*) \quad \sum_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \pm \infty).$$

Dazu schätzen wir für

$$|n| > 2\left(|\vartheta| + 2c + \frac{2c}{\delta}\right)$$

mit

$$\delta = \min_{k \text{ ganz}} |k + \vartheta| > 0$$

den Ausdruck

$$n^2 \sum_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} = \sum_{m \neq n} \frac{n^2}{|(m-n)(m+n+\vartheta) + c_m - c_n|^2}$$

ab. Wir zerlegen hier

$$\sum_{m \neq n} = \sum_{|m-n| \geq |n|} + \sum_{0 < |m-n| < |n|},$$

dann wird die erste Summe rechts

$$\begin{aligned} \sum_{|m-n| \geq |n|} &< \sum_{|m-n| \geq |n|} \left(|m+n+\vartheta| - \frac{2c}{|n|} \right)^{-2} \\ &< \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(|k+\vartheta| - \frac{\delta}{2} \right)^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

In der zweiten Summe ist

$$0 < \frac{m}{n} < 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |(m-n)(m+n+\vartheta) + c_m - c_n| &\geq |m-n| \left(\left| 1 + \frac{m}{n} + \frac{\vartheta}{n} \right| - \frac{2c}{|n|} \right) \\ &> |m-n| \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also wird sie:

$$\sum_{0 < |m-n| < |n|} < 4 \sum_{0 < |m-n| < |n|} (m-n)^{-2} < 8 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2};$$

damit ist (*) bewiesen.

Daraus folgt unmittelbar

$$d_n^{-2} = \max_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

also (2).

Schließlich hat man für $|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$, ebenfalls unter Zurückführung auf (*),

$$\begin{aligned} \sum_m |\lambda - \lambda_m|^{-2} &= |\lambda - \lambda_n|^{-2} + \sum_{m \neq n} |\lambda - \lambda_m|^{-2} \\ &\leq \frac{4}{d_n^2} + \sum_{m \neq n} \left(|\lambda_m - \lambda_n| - \frac{d_n}{2} \right)^{-2} \\ &< \frac{4}{d_n^2} + 4 \sum_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right); \end{aligned}$$

das ist (3).

HILFSSATZ 4. Seien

λ_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) verschiedene komplexe Zahlen,

$P_2(z)$ ein Polynom vom Grade 2,

$$P_2(n_1) \neq P_2(n_2) \quad (n_1 \neq n_2, n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\lambda_n = P_2(n) + O(1) \quad (n \rightarrow \pm \infty),$$

$$S_2(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-2} \quad (\lambda \neq \lambda_n).$$

Dann gibt es einfach geschlossene Kurven $\mathfrak{C}_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) mit den Eigenschaften:

(1) Auf $\mathfrak{C}_k$ liegt kein λ_n .

(2) $\mathfrak{C}_k$ umschließt einmal positiv genau die λ_n mit $|n| \leq k$, abgesehen von gewissen λ_n , (die fehlen oder hinzutreten), deren Anzahl jedoch beschränkt ist, und deren Indizes für $k \rightarrow \infty$ gegen $\pm \infty$ streben.

$$(3) \oint_{\mathfrak{C}_k} S_2(\lambda) |d\lambda| = O\left(\frac{1}{k} \log k\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

(4) Das Maximum von $S_2(\lambda)$ für $\lambda \in \mathfrak{C}_k$, strebt gegen 0 für $k \rightarrow \infty$.

Die $\mathfrak{C}_k$ können als Rechtecke gewählt werden.

BEWEIS. Es genügt, den Beweis zu führen unter den Annahmen (vgl. Hilfssatz 3)

$$\lambda_n = n(n + \vartheta) + c_n,$$

$$\vartheta \text{ nicht ganz,}$$

$$|c_n| \leq c < \infty.$$

Denn das kann offenbar durch ganze lineare Transformation der λ -Ebene erreicht werden. Wir legen also im folgenden die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 zugrunde.

Wir wählen dann zunächst die natürlichen Zahlen n_0, n_1 , und die reelle Zahl a so, daß

$$b_0 = n_0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta > 0,$$

$$b_1 = n_1 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta > 0,$$

$$0 < a - b_0 < 1,$$

$$0 < a - b_1 < 1,$$

$$|\operatorname{Re} c_n - \frac{1}{4} (\operatorname{Re} \vartheta)^2| < \begin{cases} \frac{1}{2} (a - b_0) (a + b_0) \\ \frac{1}{2} (1 - a + b_0) (a + b_0) \end{cases} \quad (n \geq n_0)$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{1}{2} (a - b_1) (a + b_1) \\ \frac{1}{2} (1 - a + b_1) (a + b_1) \end{matrix} \right\} \quad (n \leq -n_1).$$

Dazu wählt man n_0, n_1 hinreichend groß so, daß sich $n_0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta, n_1 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta$ höchstens um $\frac{1}{2}$ unterscheiden, und dann etwa a um $\frac{1}{4}$ größer als die größere dieser beiden Zahlen. Es braucht dann nur

$$|\operatorname{Re} c_n - \frac{1}{4} (\operatorname{Re} \vartheta)^2| < \frac{1}{8} a \quad (n \geq n_0 \text{ oder } n \leq -n_1)$$

zu sein.

Wir betrachten nun gemäß Hilfssatz 3:

$$\int_{\operatorname{Re} \lambda = (k+a)^2} S_2(\lambda) |d\lambda| = \pi \sum_n |(k+a)^2 - (n + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta)^2 - \operatorname{Re} c_n + \frac{1}{4} (\operatorname{Re} \vartheta)^2|^{-1}.$$

Wir zerlegen hier

$$\sum_n = \sum_{n=-n_1+1}^{n_0-1} + \sum_{n \geq n_0} + \sum_{n \leq -n_1}.$$

Die erste Summe enthält nur endlich viele Glieder und ist $O(1/k^2)$ für $k \rightarrow +\infty$. Die zweite Summe kann geschrieben werden

$$\sum_{m=0}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1},$$

indem man

$$m = n - n_0, \quad b = b_0 = n_0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta, \quad c_m^* = -\operatorname{Re} c_n + \frac{1}{4} (\operatorname{Re} \vartheta)^2$$

setzt, und ist nach Hilfssatz 1 $O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$. Die dritte Summe kann ebenfalls geschrieben werden

$$\sum_{m=0}^{\infty} |(k+a)^2 - (m+b)^2 + c_m^*|^{-1},$$

indem man

$$m = -n - n_1, \quad b = b_1 = n_1 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vartheta, \quad c_m^* = -\operatorname{Re} c_n + \frac{1}{4} (\operatorname{Re} \vartheta)^2$$

setzt, und ist nach Hilfssatz 1 auch $O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$. Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind nach der obigen Konstruktion von a, b, b_1, n_0, n_1 , gegeben.

Damit ist nun — für hinreichend große k definiert —

$$\int_{\operatorname{Re} \lambda = (k+a)^2} S_2(\lambda) |d\lambda| = \pi \sum_n |(k+a)^2 - \operatorname{Re} \lambda_n|^{-1} = O\left(\frac{1}{k} \log k\right).$$

Klar ist damit natürlich auch, daß für $k \rightarrow \infty$

$$\max \{S_2(\lambda) \mid \operatorname{Re} \lambda = (k+a)^2\} \rightarrow 0.^3)$$

Ferner ist

$$\operatorname{Re} \lambda_n < (k+a)^2$$

äquivalent zu

$$k(k+2a) - n(n + \operatorname{Re} \vartheta) + a^2 - \operatorname{Re} c_n > 0,$$

d. h.

$$k^2 - n^2 + 2ak - n \operatorname{Re} \vartheta + a^2 - \operatorname{Re} c_n > 0$$

oder

$$k - |n| + O(1) > 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, 3, \dots, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right);$$

das bedeutet, daß links der Geraden $\operatorname{Re} \lambda = (k+a)^2$ genau die λ_n mit $|n| \leq k$ liegen, abgesehen nur von gewissen λ_n (die fehlen oder zuviel sind), deren Anzahl mit $k \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt, und deren Indizes mit $k \rightarrow \infty$ gegen $\pm \infty$ streben.

Weiter wählen wir nun für $k = 1, 2, 3, \dots$ gewisse $r_k < \operatorname{Re} \lambda_n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) so, daß

$$\int_{\operatorname{Re} \lambda = r_k} S_2(\lambda) |d\lambda| = \pi \sum_n |r_k - \operatorname{Re} \lambda_n|^{-1} = O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$$

und mithin auch für $k \rightarrow \infty$

$$\max \{S_2(\lambda) \mid \operatorname{Re} \lambda = r_k\} \rightarrow 0.$$

Das ist wegen

$$\sum_n |x - \operatorname{Re} \lambda_n|^{-1} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

offenbar möglich.

³⁾ Denn man hat für $\operatorname{Re} \lambda = (k+a)^2$ offenbar

$$S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_n |(k+a)^2 - \operatorname{Re} \lambda_n|^{-1}.$$

Schließlich wählen wir positive Zahlen j_k ($k=1, 2, 3, \dots$) so groß, daß für $k \rightarrow \infty$

$$\min \{j_k - |\operatorname{Im} \lambda_n| \mid \operatorname{Re} \lambda_n < (k+a)^2\} \rightarrow +\infty,$$

$$\int_{(\operatorname{Im} \lambda = \pm j_k, r_k \leq \operatorname{Re} \lambda \leq (k+a)^2)} S_2(\lambda) |d\lambda| = O\left(\frac{1}{k} \log k\right),$$

und daß für $k \rightarrow \infty$

$$\max \{S_2(\lambda) \mid \operatorname{Im} \lambda = \pm j_k, r_k \leq \operatorname{Re} \lambda \leq (k+a)^2\} \rightarrow 0.$$

Das ist nach Hilfssatz 2 möglich.

Wir wählen dann für hinreichend große k ($\geq k_0$) als $\mathfrak{C}_k$ das Rechteck, das durch die 4 Endpunkte der vorstehend notierten Integrationsstrecken gebildet wird. Diese $\mathfrak{C}_k$ erfüllen dann nach Konstruktion sämtliche Behauptungen unseres Satzes; man wird dabei noch, falls nötig, $\mathfrak{C}_1 = \dots = \mathfrak{C}_{k_0-1} = \mathfrak{C}_{k_0}$ setzen.

ZUSATZ. Hilfssatz 2 gilt ebenso, wenn man überall

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ durch } (n = 0, 1, 2, \dots)$$

und

$$(n \rightarrow \pm \infty) \text{ durch } (n \rightarrow +\infty)$$

ersetzt.

Hilfssatz 3 gilt entsprechend, wenn man ersetzt (in Voraussetzungen und Behauptungen)

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ durch } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$n \rightarrow \pm \infty \text{ durch } n \rightarrow +\infty,$$

$$\vartheta \text{ nicht ganz durch } \vartheta \neq -1, -2, -3, \dots$$

Hilfssatz 4 gilt entsprechend, wenn man überall

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ durch } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n \rightarrow \pm \infty \text{ durch } n \rightarrow +\infty,$$

$$n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ durch } n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$|n| \leq k \text{ durch } n \leq k$$

ersetzt.

Das ist unmittelbar zu sehen.

2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern

21. VORAUSSETZUNGEN, VORBEMERKUNGEN.

$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \dots$ seien komplexe lineare Räume. Abgesehen von den Bezeichnungen n, m, k, s für ganze Zahlen schreiben wir die Elemente dieser Räume mit kleinen lateinischen Buchstaben und die komplexen Zahlen mit

kleinen griechischen Buchstaben. Man habe für die genannten Räume

$$(1) \quad \mathfrak{R}_1 \supseteq \mathfrak{R}_2 \supseteq \mathfrak{R}_3 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{R}.$$

Im Raume $\mathfrak{R}_s$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) sei eine Norm $\|f\|_s$ erklärt, bezüglich der $\mathfrak{R}_s$ zu einem Banach-Raum wird. Es gelte für $f \in \mathfrak{R}_{s+1}$

$$(2) \quad \|f\|_s \leq \|f\|_{s+1} \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

Schließlich gelte

$$(3) \quad \mathfrak{R} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathfrak{R}_s.$$

Eine Folge $f_n \in \mathfrak{R}$ heißt Cauchy-Folge, wenn sie innerhalb jedes Banach-Raumes $\mathfrak{R}_s$ Cauchy-Folge ist; wir schreiben ebenso

$$f_n \rightarrow f \quad (\in \mathfrak{R}),$$

wenn dies innerhalb jedes $\mathfrak{R}_s$ gilt. Wegen (2), (3) ist dann $\mathfrak{R}$ perfekt: zu jeder Cauchy-Folge f_n aus $\mathfrak{R}$ gibt es ein f aus $\mathfrak{R}$ mit $f_n \rightarrow f$.

$\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ seien (perfekte!) Unterräume von $\mathfrak{R}$.

Für $u \in \mathfrak{U}$, $v \in \mathfrak{U}^*$ sei ein bilineares Funktional (u, v) erklärt. (u, v) ist also eine komplexe Zahl; man hat

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v),$$

$$(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (u, v_1) + \alpha_2 (u, v_2).$$

Dies Funktional sei beschränkt: mit einer Konstanten $\varkappa > 0$ gilt stets

$$(4) \quad |(u, v)| \leq \varkappa \|u\|_s \|v\|_s \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

Weiter möge das Funktional in recht scharfer Weise nichttrivial sein: Gilt für ein $v \in \mathfrak{U}^*$

$$(u, v) = 0$$

mit allen $u \in \mathfrak{U}$, so ist $v = 0$.

F und G seien in der von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^*$ aufgespannten Linearmannigfaltigkeit erklärte lineare Operatoren, die $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ invariant lassen:

$$(5) \quad F\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}, \quad F\mathfrak{U}^* \subseteq \mathfrak{U}^*, \quad G\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}, \quad G\mathfrak{U}^* \subseteq \mathfrak{U}^*.$$

Bezüglich des bilinearen Funktionalen seien F und G symmetrisch:

$$(6) \quad (Fu, v) = (u, Fv), \quad (Gu, v) = (u, Gv).$$

G sei beschränkt: im Definitionsbereich gelte mit Konstanten $\gamma_s > 0$

$$(7) \quad \|Gf\|_s \leq \gamma_s \|f\|_s \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

F habe die etwas schwächere Eigenschaft: im Definitionsbereich gelte mit Konstanten $\varphi_s > 0$

$$(8) \quad \|Ff\|_s \leq \varphi_s \|f\|_{s+1} \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

Danach sind F und G in $\mathfrak{R}$ stetig: aus $f_n \rightarrow f$ folgt $Ff_n \rightarrow Ff$, $Gf_n \rightarrow Gf$.

Wir betrachten nun die zweiparametrische Eigenwertaufgabe

$$(9) \quad \begin{cases} Fy + \lambda y + \mu Gy = 0, & y \in \mathfrak{U}, \quad y \neq 0, \\ Fy^* + \lambda y^* + \mu Gy^* = 0, & y^* \in \mathfrak{U}^*, \quad y^* \neq 0. \end{cases}$$

Bestehen diese Gleichungen, so nennen wir (λ, μ) Eigenwertpaar, y, y^* zugehörige Eigenlösungen.

Für diese Eigenwertaufgabe legen wir die folgenden Voraussetzungen zugrunde:

① Es gibt eine ganze Funktion, $\Delta(\lambda, \mu)$, zweier komplexer Variablen, derart, daß $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ für das Bestehen einer der Gln. (5) notwendig, für das Bestehen beider Gln. (5) (mit geeigneten y, y^*) hinreichend ist.

Wenn also eine der Gln. (5) gilt, so ist mit geeignetem y bzw. y^* auch die andere erfüllt.

② Zu jedem Eigenwertpaar (λ_0, μ_0) gibt es zwei Funktionen $y(\lambda, \mu)$, $y^*(\lambda, \mu)$ mit Werten aus $\mathfrak{H}$, die für (λ, μ) in einer Umgebung von (λ_0, μ_0) holomorph⁴⁾ sind, derart daß für ein Eigenwertpaar (λ, μ) aus dieser Umgebung

$$y = \eta \cdot y(\lambda, \mu), \quad y^* = \eta^* \cdot y^*(\lambda, \mu), \\ \eta \neq 0, \quad \eta^* \neq 0$$

die Gesamtheit der zugehörigen Eigenlösungen darstellt.

Jedes Eigenwertpaar ist danach einfach.

③ Zu $\mu = 0$ gibt es abzählbar unendlich viele verschiedene Eigenwerte

$$(10) \quad \lambda_n = P_2(n) + O(1).$$

Dabei ist P_2 ein Polynom vom Grade 2. n durchläuft entweder $0, 1, 2, \dots$ oder $0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Für je zwei verschiedene solche n_1, n_2 gilt

$$(11) \quad P_2(n_1) \neq P_2(n_2).$$

y_n, y_n^* seien Eigenlösungen zu $(\lambda_n, 0)$. Sie bilden ein Biorthogonalsystem.

$$(12) \quad (y_n, y_m^*) = \delta_{nm}.$$

(Dabei läßt sich $(y_n, y_m^*) = 0$ ($n \neq m$) in bekannter Weise mit (6) folgern; nur die Möglichkeit der Normierung $(y_n, y_n^*) = 1$ wird also gefordert.)

⁴⁾ Das bedeutet: für jeden Banach-Raum $\mathfrak{H}_s$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) ist z.B. $y(\lambda, \mu)$ eine in der Umgebung von (λ_0, μ_0) holomorphe Funktion in $\mathfrak{H}_s$. Entsprechend definieren wir holomorphe Funktionen einer Variablen in $\mathfrak{H}$. Bezüglich der einfachsten Sätze über analytische Funktionen von einer oder zwei Variablen mit Werten in einem Banach-Raum vergleiche man etwa HILLE-PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-Groups, S. 92ff, New York 1957. Bei Beachtung der vorstehenden Definitionen übertragen sich diese Sätze weitgehend fast unmittelbar auf analytische Funktionen in $\mathfrak{H}$, insbesondere Integralsatz, Integralformel, Satz über die Laurent-Entwicklung, Residuensatz. Dazu ist die Konvergenzdefinition in $\mathfrak{H}$ heranzuziehen.

Die y_n bilden innerhalb $\mathfrak{H}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$; d. h.: jedes f aus $\mathfrak{U}$ ist — Konvergenz in $\mathfrak{H}$ —

$$(13) \quad f = \sum_n (f, y_n^*) y_n$$

entwickelbar; dabei sei mit $\sum_n$ im Falle $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ gemeint

$$\sum_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq k}.$$

Mit Konstanten $\alpha_s > 0$ gelte für jedes $s=1, 2, 3, \dots$

$$(14) \quad \sum_n \|(f, y_n^*) y_n\|_s^2 \leq \alpha_s^2 \|f\|_s^2.$$

④ Die Eigenwerte λ_n zu $\mu=0$ sind einfache Nullstellen von $\Delta(\lambda, \mu)$.

⑤ Die inhomogene Gleichung

$$(15) \quad Fz + \lambda z + \mu Gz = f$$

ist, falls (λ, μ) nicht Eigenwertpaar, für jedes f aus $\mathfrak{U}$ durch ein z aus $\mathfrak{U}$ (eindeutig) lösbar. $\Delta(\lambda, \mu) z(\lambda, \mu)$ ist eine ganze Funktion von λ, μ (vgl. Anm. 4)).

22. GRUNDLAGEN DER THEORIE.

Wir betrachten zunächst die Lösung der inhomogenen Aufgabe (15) für $\mu=0$ und behaupten

SATZ 1. Für

$$\lambda \neq \lambda_n, \quad f \in \mathfrak{U}$$

wird

$$Fz + \lambda z = f, \quad z \in \mathfrak{U}$$

durch

$$(16) \quad z = R(\lambda, 0) f = \sum_n \frac{(f, y_n^*)}{\lambda - \lambda_n} y_n$$

gelöst.

Es gilt⁵⁾

$$(17) \quad \|R(\lambda, 0) f\| \leq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha \|f\|,$$

wenn

$$S_2(\lambda) = \sum_n |\lambda - \lambda_n|^{-2}$$

gesetzt wird.

BEWEIS. z existiert nach Voraussetzung ⑤ und kann nach ③, (13) entwickelt werden:

$$z = \sum_n (z, y_n^*) y_n.$$

Aus

$$Fz + \lambda z = f, \quad z \in \mathfrak{U}, \quad f \in \mathfrak{U}$$

$$F y_n^* + \lambda_n y_n^* = 0, \quad y_n^* \in \mathfrak{U}^*$$

⁵⁾ Hier und im folgenden lassen wir bei Abschätzungen, die für jede Norm $\|\cdot\|_s$, $s=1, 2, 3, \dots$, gelten, bei $\|\cdot\|_s$, α_s , γ_s den Index s fort.

folgt nun mit (6) durch Multiplikation der ersten Gleichung von hinten mit y_n^* und der zweiten von vorn mit z :

$$(\lambda - \lambda_n)(z, y_n^*) = (f, y_n^*),$$

also (16). Die Abschätzung (17) ergibt sich dann aus (14) und (16) mit der Schwarzschen Ungleichung für Reihen:

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\leq \left(\sum_n \left\| \frac{(f, y_n^*)}{\lambda - \lambda_n} y_n \right\| \right)^2 \\ &\leq \sum_n |\lambda - \lambda_n|^{-2} \sum_n \|(f, y_n^*) y_n\|^2 \\ &\leq S_2(\lambda) \alpha^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Satz 1 zieht eine wichtige Folgerung nach sich:

SATZ 2. Für jedes Eigenwertpaar λ, μ gilt

$$S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \leq \alpha \gamma |\mu|.$$

(Dabei sei

$$S_2(\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

verabredet.)

BEWEIS. Mit einem $y \neq 0, \in \mathfrak{U}$ ist

$$F y + \lambda y = -\mu G y.$$

Wir brauchen nur $\lambda \neq \lambda_n$ zu betrachten. Dann wird mit Satz 1 und (7)

$$0 < \|y\| \leq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha \|\mu G y\| \leq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha \gamma |\mu| \|y\|.$$

Dieser Satz 2 liefert nun zusammen mit den Voraussetzungen ①, ③ und ④ schon den Hauptsatz über die Gesamtheit der Eigenwertpaare:

SATZ 3. Für jedes n läßt sich $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ um $\lambda = \lambda_n, \mu = 0$ (implizite Funktion!) durch eine Potenzreihe

$$\lambda_n(\mu) = \lambda_n + \lambda_{n1}\mu + \lambda_{n2}\mu^2 + \dots$$

auflösen. Mit geeigneten positiven Konstanten C, D gilt für die Konvergenzradien ϱ_n und die Koeffizienten $\lambda_{nk} (k=1, 2, 3, \dots)$

$$\varrho_n \geq C(1 + |n|),$$

$$|\lambda_{nk}| \leq D^k (1 + |n|)^{-(k-1)}.$$

Daher ist für jedes μ bei $n \rightarrow \pm \infty$ bzw. $n \rightarrow \infty$

$$\lambda_n(\mu) = \lambda_n + \lambda_{n1}\mu + \dots + \lambda_{nk}\mu^k + O(n^{-k}).$$

Die erhaltenen Funktionselemente lassen sich — Verzweigungsstellen endlicher Ordnung zugelassen — längs jedes Weges der komplexen μ -Ebene analytisch fortsetzen. Man erhält so in den $(\lambda_n(\mu), \mu)$ die Gesamtheit der Eigenwertpaare.

Die Spurpunkte der Verzweigungsstellen besitzen keinen endlichen Häufungspunkt. Zieht man z. B. von jedem Verzweigungsspurpunkt μ_0 (natürlich $\neq 0$) den Schnitt (bezüglich 0) radial nach ∞ und rechnet den Schnitt jeweils zu einem bestimmten Ufer, so sind hierdurch (Verbot der Überschreitung der Schnitte bei analytischer Fortsetzung) die Funktionen $\lambda_n(\mu)$ in der μ -Ebene eindeutig definiert.

Die „Ausnahmewerte“ μ_0 , für die einmal

$$\lambda_{n_1}(\mu_0) = \lambda_{n_2}(\mu_0) \quad (n_1 \neq n_2)$$

im eben definierten Sinne wird, (darunter sind natürlich die Verzweigungsspurpunkte) haben keinen endlichen Häufungspunkt.

BEWEIS. Die Auflösbarkeit durch Potenzreihen um $\lambda = \lambda_n$, $\mu = 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen wegen der Voraussetzung 4.

Für alles weitere gehen wir davon aus, daß in der komplexen λ -Ebene jede Punktmenge

$$S_2(\lambda) \geq \delta > 0$$

in abzählbar viele getrennte kompakte Mengen zerfällt. Das liefern sofort die Überlegungen des Abschnitts 1.

Diese zeigen insbesondere, daß mit einer Konstanten $K > 0$ auf dem Kreise

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

die Abschätzung

$$S_2(\lambda) \leq K^2(|n| + 1)^{-2}$$

gilt. Dann liefert aber Satz 2, daß für

$$|\mu| < \frac{1}{K\alpha\gamma}(|n| + 1)$$

unmöglich

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

sein kann.

Damit folgen die übrigen Aussagen des Satzes in fast wörtlicher Übereinstimmung auf Grund von Schlußweisen aus früheren Arbeiten des Verfassers⁶⁾. Insbesondere ist

$$\varrho_n \geq \frac{1}{K\alpha\gamma}(|n| + 1)$$

und für

$$|\mu| < \varrho_n$$

stets

$$|\lambda_n(\mu) - \lambda_n| < \frac{c}{2}(|n| + 1),$$

⁶⁾ Vgl.: Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern. Math. Nachr. 6, 109–124 (1951). Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung. J. angew. Math. Mech. 33, H. 8/9 (1953); oder auch: Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. 133, 219–234 (1957).

also ($k=1, 2, 3, \dots$)

$$|\lambda_{nk}| \leq \frac{c}{2} (K \alpha \gamma)^k (|n| + 1)^{-(k-1)};$$

dabei ist $c > 0$ eine Konstante mit

$$d_n \leq c(|n| + 1).$$

Im folgenden nennen wir ein μ , das nicht Ausnahmewert ist, auch „normal“. Für ein normales μ sind alle $\lambda_n(\mu)$ gemäß Satz 3 verschieden und einfache Nullstellen von $\Delta(\lambda, \mu)$.

Wir ziehen nun noch Voraussetzung ② über die Eigenlösungen heran. Wir bilden zu $(\lambda_n(\mu_0), \mu_0)$ die Funktionen $y(\lambda, \mu)$, $y^*(\lambda, \mu)$. Dann sind

$$\hat{y}_n(\mu) = y(\lambda_n(\mu), \mu), \quad \hat{y}_n^*(\mu) = y^*(\lambda_n(\mu), \mu)$$

für μ in einer Umgebung von μ_0 zugleich mit $\lambda_n(\mu)$ holomorphe Eigenlösungen zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$. Speziell hat man um $\mu=0$ Potenzreihenentwicklungen

$$\hat{y}_n(\mu) = \hat{y}_{n0} + \mu \hat{y}_{n1} + \mu^2 \hat{y}_{n2} + \dots,$$

$$\hat{y}_n^*(\mu) = \hat{y}_{n0}^* + \mu \hat{y}_{n1}^* + \mu^2 \hat{y}_{n2}^* + \dots.$$

Nach ② kann durch Multiplikation mit von μ unabhängigem Zahlfaktor

$$\hat{y}_{n0} = y_n, \quad \hat{y}_{n0}^* = y_n^*$$

erreicht werden, was im folgenden angenommen sei. Wegen der Perfektheit von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ gehören die Koeffizienten $\hat{y}_{nk}$ bzw. $\hat{y}_{nk}^*$ zu $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}^*$. Wegen der Stetigkeit von F und G in $\mathfrak{R}$ können diese Operatoren auf die Potenzreihen gliedweise angewandt werden. So folgt mit Koeffizientenvergleich speziell

$$F \hat{y}_{n1} + \lambda_n \hat{y}_{n1} = -\lambda_{n1} y_n - G y_n.$$

Beachtet man daneben

$$F y_n^* + \lambda_n y_n^* = 0,$$

multipliziert mit y_n^* von hinten bzw. mit $\hat{y}_{n1}$ von vorn, so folgt

SATZ 3*. Die Koeffizienten von μ in den Potenzreihen $\lambda_n(\mu)$ sind

$$\lambda_{n1} = -(G y_n, y_n^*).$$

Wir erhalten weiter bezüglich der — bis auf Zahlfaktor $\neq 0$ bestimmten — Eigenlösungen $\hat{y}_n(\mu)$, $\hat{y}_n^*(\mu)$ zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$:

SATZ 4. Ist $\lambda_{n_1}(\mu_0) \neq \lambda_{n_2}(\mu_0)$, so gilt

$$(\hat{y}_{n_1}(\mu_0), \hat{y}_{n_2}^*(\mu_0)) = 0;$$

ist $\lambda_{n_1}(\mu_0) = \lambda_{n_2}(\mu_0)$ mit $n_2 \neq n_1$, so gilt

$$(\hat{y}_{n_1}(\mu_0), \hat{y}_{n_1}^*(\mu_0)) = 0;$$

ist $\lambda_n(\mu) \neq \lambda_m(\mu)$ für alle $m \neq n$, so gilt

$$(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)) \neq 0.$$

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus

$$F \hat{y}_{n_1}(\mu) + \lambda_{n_1}(\mu) \hat{y}_{n_1}(\mu) + \mu G \hat{y}_{n_1}(\mu) = 0,$$

$$F \hat{y}_{n_2}^*(\mu) + \lambda_{n_2}(\mu) \hat{y}_{n_2}^*(\mu) + \mu G \hat{y}_{n_2}^*(\mu) = 0$$

durch Multiplikation mit $\hat{y}_{n_2}^*(\mu)$ von hinten bzw. mit $\hat{y}_{n_1}(\mu)$ von vorn.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Grenzübergang. Für $\mu \neq \mu_0$ in einer gewissen Umgebung von μ_0 ist sicher $\lambda_{n_1}(\mu) \neq \lambda_{n_2}(\mu)$, also $(\hat{y}_{n_1}(\mu), \hat{y}_{n_2}^*(\mu)) = 0$. Nach der obigen Konstruktion auf Grund von ② können $\hat{y}_{n_1}(\mu), \hat{y}_{n_2}^*(\mu)$ zumindest mit $\hat{y}_{n_1}(\mu) \rightarrow \hat{y}_{n_1}(\mu_0), \hat{y}_{n_2}^*(\mu) \rightarrow \hat{y}_{n_2}^*(\mu_0)$ gewählt werden. Mit der durch (4) gesicherten Stetigkeit des bilinearen Funktional folgt daraus die Behauptung.

Zum Beweise der letzten Aussage muß Voraussetzung ⑤ herangezogen werden. Wir betrachten bei festem μ für irgendein f aus $\mathfrak{U}$ die Lösung $z(\lambda, \mu)$ von (15) als Funktion von λ in Umgebung von $\lambda_n(\mu)$. $\lambda_n(\mu)$ ist einfache Nullstelle von $\Delta(\lambda, \mu)$. Nach dem zweiten Teil der Voraussetzung ⑤ hat also $z(\lambda, \mu)$ bei $\lambda = \lambda_n(\mu)$ höchstens einen einfachen Pol und kann in eine Laurent-Reihe entwickelt werden⁷⁾:

$$z(\lambda, \mu) = (\lambda - \lambda_n(\mu))^{-1} z_{-1} + z_0 + (\lambda - \lambda_n(\mu)) z_1 + \dots$$

Wegen der Perfektheit von $\mathfrak{U}$ gehören mit $z(\lambda, \mu)$ auch $z_{-1}, z_0, z_1, \dots$ zu diesem Unterraum. F und G können wegen ihrer Stetigkeit gliedweise angewandt werden. So hat man mit Koeffizientenvergleich

$$F z_{-1} + \lambda_n(\mu) z_{-1} + \mu G z_{-1} = 0,$$

$$F z_0 + \lambda_n(\mu) z_0 + \mu G z_0 = f - z_{-1}.$$

Die erste Gleichung zeigt

$$z_{-1} = \zeta \hat{y}_n(\mu),$$

die zweite ergibt durch die bekannte Kombination mit

$$F \hat{y}_n^*(\mu) + \lambda_n(\mu) \hat{y}_n^*(\mu) + \mu G \hat{y}_n^*(\mu) = 0$$

die Gleichung

$$(f, \hat{y}_n^*(\mu)) = \zeta (\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)).$$

Wegen $\hat{y}_n^*(\mu) \neq 0$ gibt es nach der anfangs gemachten Voraussetzung über das bilineare Funktional ein f aus $\mathfrak{U}$ mit $(f, \hat{y}_n^*(\mu)) \neq 0$, also muß auch $(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)) \neq 0$ sein. Wir vermerken noch

$$z_{-1} = \frac{(f, \hat{y}_n^*(\mu))}{(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu))} \hat{y}_n(\mu).$$

Nun folgt leicht

SATZ 5. Sei μ_0 ein normaler Wert. Dann gibt es Eigenlösungen $y_n(\mu)$, $y_n^*(\mu)$ zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$, die je in einer entsprechenden Umgebung von μ_0 holomorph

⁷⁾ Vgl. Anm. 4), S. 446.

sind und ein normiertes Biorthogonalsystem bilden:

$$(y_n(\mu), y_n^*(\mu)) = \delta_{nm}.$$

Dazu brauchen wir bei Beachtung der letzten Aussage von Satz 4 nur mit je in einer Umgebung von μ_0 holomorphen $\hat{y}_n(\mu)$, $\hat{y}_n^*(\mu)$ zu bilden

$$y_n(\mu) = (\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu))^{-\frac{1}{2}} \hat{y}_n(\mu),$$

$$y_n^*(\mu) = (\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu))^{-\frac{1}{2}} \hat{y}_n^*(\mu).$$

Dem Schluß des Beweises von Satz 4 entnehmen wir weiter noch
SATZ 6. Die Lösung der inhomogenen Aufgabe (15), die wir

$$z(\lambda, \mu) = R(\lambda, \mu) f$$

schreiben, besitzt für normales μ nur die einfachen Pole $\lambda = \lambda_n(\mu)$ mit den Residuen

$$(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu).$$

23. ENTWICKLUNGSSÄTZE.

Wir geben zuerst ein negatives Resultat:

SATZ 7. Nicht jedes f aus $\mathfrak{U}$ kann nach den Eigenlösungen $\hat{y}_n(\mu_0)$ zu einem Ausnahmewert μ_0 entwickelt werden.

BEWEIS. Sei etwa $\lambda_m(\mu_0)$ mehrfache Nullstelle von $\Delta(\lambda, \mu_0)$, so gilt nach Satz 4

$$(\hat{y}_n(\mu_0), \hat{y}_m^*(\mu_0)) = 0$$

für alle n . Aus

$$f = \sum_n \varphi_n \hat{y}_n(\mu_0)$$

würde daher

$$(f, \hat{y}_m^*(\mu_0)) = 0$$

folgen. Das kann wegen $\hat{y}_m^*(\mu_0) \neq 0$ nach einer unserer Annahmen nicht für alle f aus $\mathfrak{U}$ gelten.

Unser Ziel ist nun der Beweis eines Entwicklungssatzes für normale μ . Dazu drücken wir den in Satz 6 eingeführten Operator $R(\lambda, \mu)$ durch $R(\lambda, 0)$, G und μ aus.

SATZ 8^a). Seien ϱ, ω positive Konstanten,

$$\omega > \alpha \gamma \varrho.$$

Dann ist für

$$|\mu| \leq \varrho, \quad S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \geq \omega$$

bei absolut gleichmäßig konvergenter Reihe

$$R(\lambda, \mu) f = R(\lambda, 0) f + \sum_{p=1}^{\infty} R(\lambda, 0) (-\mu G R(\lambda, 0))^p f.$$

^a) Man beachte die Verabredung von Anm. 5), S. 447.

Es ist dort

$$\|R(\lambda, \mu)f - R(\lambda, 0)f\| \leq S_2(\lambda) \frac{\alpha^2 \gamma \varrho}{1 - \varrho \alpha \gamma \omega^{-1}} \|f\|.$$

BEWEIS. Wegen (7) und Satz 1 ist für $\rho \geq 1$

$$\|R(\lambda, 0)(-\mu G R(\lambda, 0))^{\rho} f\| \leq S_2(\lambda) \alpha^2 \gamma \varrho (\varrho \alpha \gamma \omega^{-1})^{\rho-1} \|f\|.$$

Daher ist die Reihe absolut gleichmäßig konvergent. Daß $R(\lambda, \mu)f$ ihre Summe ist, folgt aus

$$z = R(\lambda, \mu)f,$$

$$Fz + \lambda z = f - \mu Gz,$$

$$z = R(\lambda, 0)f + R(\lambda, 0)(-\mu Gz)$$

durch Iteration.

Satz 8 und die Abschätzungen von Abschnitt 1 liefern nun zunächst

Satz 9. μ sei normaler Wert. Dann kann jedes f aus $\mathfrak{U}$ in die Reihe⁹⁾

$$f = \sum_n (f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu)$$

entwickelt werden. Man hat

$$\left\| \sum_{|n| \leq k} \{(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - (f, y_n^*) y_n\} \right\| = \|f\| O\left(\frac{1}{k} \log k\right),$$

$$\|(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - (f, y_n^*) y_n\| = \|f\| O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit einer Konstanten $\alpha(\mu) > 0$ gilt daher

$$\sum_n \|(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu)\|^2 \leq \alpha(\mu)^2 \|f\|^2.$$

BEWEIS. Wir setzen $\varrho = |\mu|$ und wählen ein $\omega > \alpha \gamma \varrho$. Wir betrachten dann die Kurven $\mathfrak{C}_k$ von 1, Hilfssatz 4¹⁰⁾. Wegen der dort notierten Eigenschaft (4) ist auf $\mathfrak{C}_k$ sicher $S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \geq \omega$ für alle hinreichend großen k . Da für $|\tilde{\mu}| \leq \varrho$ und ein $\lambda = \lambda_n(\tilde{\mu})$ nach Satz 2

$$S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \leq \alpha \gamma |\tilde{\mu}| < \omega$$

gilt, werden für jedes n die Zahlen λ_n und $\lambda_n(\mu)$ von den $\mathfrak{C}_k$ mit hinreichend großem k zugleich umschlossen oder nicht.

Betrachten wir nun für diese k

$$(a) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{C}_k} (R(\lambda, \mu) - R(\lambda, 0)) f d\lambda.$$

Dies ist wegen des Residuensatzes und Satz 6 gleich der Summe

$$\sum_n^{(k)} [(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - (f, y_n^*) y_n],$$

⁹⁾ Wie bei (13) ist hier im Falle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $\sum_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq k}$ zu interpretieren.

¹⁰⁾ Im Falle der Numerierung $n = 0, 1, 2, \dots$ ist der Zusatz am Schluß von I heranzuziehen.

wobei $\sum_n^{(k)}$ die Summe über diejenigen n bedeutet, für die λ_n (und $\lambda_n(\mu)$) von $\mathfrak{C}_k$ umschlossen wird.

Andererseits kann nun der Integrand in (a) gemäß Satz 8, letzte Zeile, abgeschätzt werden. Bis auf den von k unabhängigen Faktor

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\alpha^2 \gamma \varrho}{1 - \varrho \alpha \gamma \omega^{-1}} \|f\|$$

kann also der Ausdruck (a) der Norm nach durch

$$\oint_{\mathfrak{C}_k} S_2(\lambda) |d\lambda|$$

abgeschätzt werden. Dies ist nun nach 1, Hilfssatz 4¹¹⁾, $O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$ bei $k \rightarrow \infty$.

Damit ist zunächst

$$(b) \quad \left| \sum_n^{(k)} [(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - (f, y_n^*) y_n] \right| = \|f\| O\left(\frac{1}{k} \log k\right).$$

Weiter betrachten wir nun die Folge der

$$\max \left\{ S_2(\lambda) \mid |\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2} \right\},$$

die nach 1, Hilfssatz 3¹²⁾, $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sind, also für hinreichend große $|n|$ sicher $\leq \omega^{-2}$.

Dann gilt wieder — wie eben —: Der Kreis

$$\mathfrak{K}_n = \left\{ \lambda \mid |\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2} \right\}$$

umschließt von allen $\lambda_m, \lambda_m(\mu)$ genau das Paar $\lambda_n, \lambda_n(\mu)$.

Nun gilt $\frac{d_n}{2} \leq \frac{c}{2} (|n| + 1)$, also

$$\oint_{\mathfrak{K}_n} S_2(\lambda) |d\lambda| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wie oben schließt man damit wegen des Residuensatzes, Satz 6 und Satz 8

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{K}_n} (R(\lambda, \mu) - R(\lambda, 0)) f d\lambda = \|(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - (f, y_n^*) y_n\| = \|f\| O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dies ist schon die dritte Aussage von Satz 9. Nach ihr ist

$$\sum_n \|(f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - (f, y_n^*) y_n\|^2 \leq \hat{\alpha}(\mu)^2 \|f\|^2,$$

¹¹⁾ Vgl. Anm. 10), S. 453.

¹²⁾ Vgl. Anm. 10), S. 453.

also mit (14)

$$\sum_n \| (f, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) \|^2 \leq (\alpha + \hat{\alpha}(\mu))^2 \|f\|^2;$$

das ist mit

$$\alpha(\mu) = \alpha + \hat{\alpha}(\mu)$$

die letzte Aussage von Satz 9. Die zweite Aussage ergibt sich nun aus (b) wegen der dritten Aussage und der Eigenschaft (2) der Kurven $\mathfrak{C}_k$ in **1**, Hilfssatz 4¹³⁾. Diese zweite Aussage liefert schließlich die erste Aussage, also den Entwicklungssatz, zusammen mit (13).

24. POTENZREIHEN UND ASYMPTOTIK VON EIGENLÖSUNGEN.

Wir betrachten, wie oben beim Beweise von Satz 9, die Kreise $\mathfrak{R}_n$, die für hinreichend große $|n|$ genau λ_n , $\lambda_n(\mu)$ umschließen. Wir können dann die Reihe von Satz 8 über $\mathfrak{R}_n$ gliedweise integrieren; wir setzen dabei speziell $f = y_n$:

$$\begin{aligned} (y_n, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{R}_n} R(\lambda, \mu) y_n d\lambda = y_n + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p y_{np} \\ &- \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{R}_n} R(\lambda, 0) y_n d\lambda + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{R}_n} R(\lambda, 0) (-GR(\lambda, 0))^p y_n d\lambda. \end{aligned}$$

Wir können nun

$$\|R(\lambda, 0) (-GR(\lambda, 0))^p y_n\| \leq \gamma^p \alpha^{p+1} S_2(\lambda)^{\frac{p+1}{2}} \|y_n\|$$

abschätzen, was also auf $\mathfrak{R}_n$ gemäß **1**, Hilfssatz 3¹³⁾, für jedes $p=1, 2, \dots$ bei $n \rightarrow \infty$

$$= \|y_n\| O(n^{-p-1})$$

ist. Damit folgt

$$\|y_{np}\| = \|y_n\| O(n^{-p}) \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

und mit entsprechender Abschätzung des Reihenrestes:

SATZ 10. Die μ -Potenzreihe

$$(y_n, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) = y_n + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p y_{np}$$

ist zugleich asymptotische Reihe für $n \rightarrow \pm \infty$: bei festem μ und k hat man für $n \rightarrow \pm \infty$ stets

$$\|(y_n, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - y_n - \mu y_{n1} - \dots - \mu^k y_{nk}\| = \|y_n\| O(n^{-k-1}).$$

25. BEMERKUNG.

Ist μ normaler Wert, so sind für $F + \mu G$ an Stelle von F wieder die Voraussetzungen von **21** gegeben. Bei den Forderungen ①, ②, ⑤ ist das trivial; ④ ist erfüllt, da μ normaler Wert ist. ③ schließlich ist in den Sätzen 3, 5 und 9 gegeben.

¹³⁾ Vgl. Anm. 10), S. 453.

26. EINE MODIFIKATION.

Wir nehmen im folgenden an:

Bezüglich $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^* = \mathfrak{U}$, (u, v) , F , G mögen die Annahmen von 21 bis einschließlich (8) erfüllt sein.

Es seien nun $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ (in $\mathfrak{H}$) perfekte Unterräume von $\mathfrak{U}$, derart daß für $u_1 \in \mathfrak{U}_1$, $u_2 \in \mathfrak{U}_2$ stets

$$(*) \quad (u_1, u_2) = (u_2, u_1) = 0.$$

Für $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ mögen ebenfalls die genannten Annahmen gegeben sein. Ferner sollen für die beiden Eigenwertprobleme (9) mit $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ je die Voraussetzungen 1 bis 6 gelten. Dabei seien jedoch — mit geänderter Bezeichnung —

$$\lambda_n = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

die Eigenwerte zu $\mu = 0$ im Falle $\mathfrak{U}_1$ und

$$\lambda_{-n} = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

die Eigenwerte zu $\mu = 0$ im Falle $\mathfrak{U}_2$; entsprechend seien

$$y_n = y_n^* \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

bzw.

$$y_{-n} = y_{-n}^* \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

die zugehörigen Eigenlösungen. Analog numerieren wir die $\lambda_n(\mu)$, $y_n(\mu)$.

Es gelte nun: Jedes $f \in \mathfrak{U}$ ist entwickelbar

$$(a) \quad f = (f, y_0) y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(f, y_n) y_n + (f, y_{-n}) y_{-n}]$$

mit

$$(b) \quad \|(f, y_0) y_0\|_s^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|(f, y_n) y_n + (f, y_{-n}) y_{-n}\|_s^2 \leq \tilde{\alpha}_s^2 \|f\|_s^2 \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann behaupten wir:

SATZ 11. Ist μ normaler Wert sowohl bezüglich der Eigenwertaufgabe für $\mathfrak{U}_1$ als auch bezüglich der für $\mathfrak{U}_2$, so ist jedes f aus $\mathfrak{U}$ auch entwickelbar

$$f = (f, y_0(\mu)) y_0(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} [(f, y_n(\mu)) y_n(\mu) + (f, y_{-n}(\mu)) y_{-n}(\mu)].$$

BEWEIS. Wir können wegen (*) in den Voraussetzungen (3), (14) für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ $\alpha = \tilde{\alpha}$ annehmen.

Wir dehnen nun die Definition von $R(\lambda, \mu)f$ aus auf alle $f \in \mathfrak{U}$. Zunächst bilden wir für $\lambda \neq \lambda_n$

$$R(\lambda, 0)f = \frac{(f, y_0) y_0}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, y_n) y_n + (f, y_{-n}) y_{-n}}{\lambda - n^2}.$$

Das ist nach unserer Annahme (b) für $f \in \mathfrak{U}$ konvergent und wir haben¹⁴⁾

$$\|R(\lambda, 0)f\| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - n^2|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\alpha} \|f\|.$$

Wir bilden dann weiter zunächst

$$R(\lambda, \mu)f = R(\lambda, \mu)f_1 + R(\lambda, \mu)f_2$$

für die

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in \mathfrak{U}_1, \quad f_2 \in \mathfrak{U}_2.$$

Es gilt wieder, wie in Satz 8,

$$(*) \quad R(\lambda, \mu)f = R(\lambda, 0)f + \sum_{p=1}^{\infty} R(\lambda, 0)(-\mu G R(\lambda, 0))^p f$$

mit

$$(**) \quad \|R(\lambda, \mu)f - R(\lambda, 0)f\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - n^2|^{-2} \frac{\tilde{\alpha}^2 \gamma \varrho}{1 - \tilde{\alpha} \gamma \varrho \omega^{-1}} \|f\|,$$

falls

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - n^2|^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \geq \omega, \quad \omega > \tilde{\alpha} \gamma \varrho, \quad |\mu| = \varrho.$$

(*) wählen wir nun für beliebiges $f \in \mathfrak{U}$ und die angegebenen Paare λ, μ als Definition von $R(\lambda, \mu)f$; (**) bleibt dabei gültig.

Nun ziehen wir die Kurven $\mathfrak{C}_k$ von 1, Hilfssatz 4 (mit Zusatz) heran¹⁵⁾. Wir betrachten

$$(c) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{C}_k} (R(\lambda, \mu)f - R(\lambda, 0)f) d\lambda$$

für ein $f \in \mathfrak{U}$. Das ist für hinreichend große k möglich, da dann die Paare $\lambda \in \mathfrak{C}_k$, μ die obige Definition von $R(\lambda, \mu)f$ zulassen. (c) ist danach auch gewiß $O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$ für $k \rightarrow \infty$.

Andererseits behaupten wir nun, daß (c) gleich

$$(d) \quad (f, y_0(\mu)) y_0(\mu) - (f, y_0) y_0 + \sum_{1 \leq |n| \leq k} ((f, y_n(\mu)) y_n(\mu) - (f, y_n) y_n)$$

wird. Dies gilt nämlich zunächst für die $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathfrak{U}_1$, $f_2 \in \mathfrak{U}_2$, da dort

$$R(\lambda, \mu)f = R(\lambda, \mu)f_1 + R(\lambda, \mu)f_2,$$

und da für $f = f_1$, $f = f_2$ die entsprechenden Darstellungen gemäß der obigen Theorie bezüglich $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ gelten. Nun hängen aber die Ausdrücke (c) und (d) innerhalb $\mathfrak{U}$ stetig von f ab; das folgt für (c) aus (**) und für (d) aus Voraussetzung (4) für (u, v) . Weiter kann nach Annahme (a) jedes $f \in \mathfrak{U}$ erhalten werden in der Form

$$f_\nu \rightarrow f \quad (\nu \rightarrow \infty)$$

$$f_\nu = f_{1\nu} + f_{2\nu}, \quad f_{1\nu} \in \mathfrak{U}_1, \quad f_{2\nu} \in \mathfrak{U}_2;$$

¹⁴⁾ Vgl. Anm. 5), S. 447.

¹⁵⁾ Wir können sie hier so wählen, daß sie genau die λ_n , $\lambda_n(\mu)$ mit $|n| \leq k$ umschließen.

man braucht ja nur

$$f_{1\nu} = (f, y_0) y_0 + \sum_{n=1}^{\nu} (f, y_n) y_n$$

$$f_{2\nu} = \sum_{n=-1}^{-\nu} (f, y_n) y_n$$

zu setzen. Damit gilt die Übereinstimmung von (c) und (d) für alle f aus 11. Da (c) als $O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$ nachgewiesen wurde, folgt nun mit (a) der Satz 11.

3. Anwendung auf die Hillsche Differentialgleichung

31. NICHT-GANZER CHARAKTERISTISCHER EXPONENT.

Die Funktion $g(t)$ sei für

$$r_1 < \operatorname{Im} t < r_2$$

— wir bezeichnen diesen Streifen im folgenden mit $\mathfrak{S}$ — holomorph und π -periodisch:

$$(1) \quad g(t + \pi) = g(t).$$

Wir betrachten die Hillsche Differentialgleichung

$$(2) \quad y''(t) + (\lambda + g(t)) y(t) = 0.$$

Sei t_0 eine Stelle aus $\mathfrak{S}$. Mit $y_1(t)$, $y_2(t)$ bezeichnen wir die Lösungen von (2) mit

$$(3) \quad \begin{cases} y_1(t_0) = 1, & y_1'(t_0) = 0, \\ y_2(t_0) = 0, & y_2'(t_0) = 1. \end{cases}$$

Sie sind abhängig noch von λ . Für irgendein komplexes ν werde

$$(4) \quad \Delta_\nu(\lambda) = \frac{1}{2} (y_1(t_0 + \pi) + y_2'(t_0 + \pi)) - \cos \pi \nu$$

gesetzt. Es ist bekanntlich $\Delta_\nu(\lambda) = 0$ notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung $y(t)$ von (2) mit

$$(5) \quad y(t + \pi) = e^{\pi i \nu} y(t) \neq 0.$$

Damit existiert zugleich eine Lösung $y^*(t)$ von (2) mit

$$(6) \quad y^*(t + \pi) = e^{-\pi i \nu} y^*(t) \neq 0;$$

denn man hat

$$\Delta_\nu(\lambda) = \Delta_{-\nu}(\lambda).$$

Unser Ziel ist nun zunächst der Beweis des folgenden Satzes:

SATZ 1. ν sei nicht ganz, $\Delta_\nu(\lambda)$ besitze keine mehrfachen Nullstellen.

Dann hat das Eigenwertproblem (2), (5) zugleich mit (2), (6) abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\lambda_{\nu+2r}$ ($r=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), die so numeriert werden

können (und im folgenden angenommen seien), daß

$$\lambda_{\nu+2r} = (\nu+2r)^2 - \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} g(t) dt + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

gilt.

Die zu $\lambda_{\nu+2r}$ gehörenden Eigenlösungen von (2), (5) bzw. (2), (6), $y_{\nu+2r}(t)$, $y_{\nu+2r}^*(t)$, können so normiert werden, daß die Biorthogonalitäts- und Normierungsrelationen

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} y_{\nu+2r}(t) y_{\nu+2s}^*(t) dt = \delta_{rs}$$

gelten. Für $r \rightarrow \pm \infty$ hat man ¹⁶⁾ (bei obiger Numerierung!)

$$y_{\nu+2r}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} y_{\nu+2r}(\tau) e^{-i(\nu+2r)\tau} d\tau \cdot e^{i(\nu+2r)t} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

wobei das $O\left(\frac{1}{r}\right)$ gleichmäßig bezüglich t in einem abgeschlossenen Streifen innerhalb $\mathfrak{E}$:

$$\varrho_1 \leq \operatorname{Im} t \leq \varrho_2$$

mit

$$r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2$$

gilt.

Jede im Streifen $\mathfrak{E}$ regulär analytische Funktion $f(t)$ mit $f(t+\pi) = e^{\pi i \nu} f(t)$ kann in die in kompakten Teilgebieten absolut gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} y_{\nu+2r}(t)$$

mit den Koeffizienten

$$c_{2r} = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} f(t) y_{\nu+2r}^*(t) dt$$

entwickelt werden.

Zum Beweise verwenden wir die Resultate von 2. Dazu betten wir (2) zusammen mit

$$(2_0) \quad y''(t) + \lambda y(t) = 0$$

in die zweiparametrische Aufgabe

$$(2\mu) \quad y''(t) + (\lambda + \mu g(t)) y(t) = 0$$

ein.

Betrachten wir dann die Eigenwertaufgaben (2μ) mit (5) bzw. (6), so lassen sich die Voraussetzungen der Theorie von 2 bestätigen.

¹⁶⁾ Darin liegt, daß der Faktor von $e^{i(\nu+2r)t}$ für große r nicht 0 ist.

Wir wählen dazu als $\mathfrak{N}$ den Raum der im Streifen $\mathfrak{S}$ holomorphen Funktionen. Wir wählen

$$r_1 < \dots < \varrho_{31} < \varrho_{21} < \varrho_{11} = \varrho_{12} < \varrho_{22} < \varrho_{32} < \dots < r_2$$

mit $\varrho_{n1} \rightarrow r_1$, $\varrho_{n2} \rightarrow r_2$. Dann sei $\mathfrak{N}_s$ ($s=1, 2, 3, \dots$) der Banach-Raum der im offenen Rechteck $\varrho_{s1} < \operatorname{Im} t < \varrho_{s2}$, $-(s-1)\pi < \operatorname{Re} t < s\pi$ holomorphen (das entfällt für $s=1$), im abgeschlossenen Rechteck stetigen Funktionen mit $\|f\|_s = \max |f(t)|$ für t im entsprechenden Rechteck. Damit sind **21**, (1), (2), (3) erfüllt. Als $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^*$ nehmen wir die Gesamtheit der im Streifen $\mathfrak{S}$ holomorphen Funktionen mit $f(t+\pi) = e^{\pi i \nu} f(t)$ bzw. $f(t+\pi) = e^{-\pi i \nu} f(t)$. Die Perfektheit ist leicht zu sehen. Wir setzen dann

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} u(t) v(t) dt,$$

was für $u \in \mathfrak{U}$, $v \in \mathfrak{U}^*$ von t_0 unabhängig ist. Es gilt offenbar (4) von **21** mit $\kappa=1$. Weiter folgt $v=0$ schon aus $v \in \mathfrak{U}^*$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)t} v(t) dt = 0 \quad (r=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

F sei dann der Operator der zweimaligen Differentiation, G der der Multiplikation mit $g(t)$. Man hat **21**, (5) und weiter auch **21**, (6) wegen

$$u''v - u v'' = (u'v - u v')'$$

und

$$u'v - u v' \Big|_{t_0}^{t_0+\pi} = 0.$$

21, (7) gilt mit $\gamma_s = \|g\|_s$, wobei $g(t)$ als Element von $\mathfrak{N}_s$ aufgefaßt wird.

21, (8) folgt, wie üblich, aus der Cauchyschen Integralformel für die zweite Ableitung.

21, (9) entspricht dann gerade (2μ) , (5) und (2μ) , (6).

Dabei gilt nun die Voraussetzung **21**, ① mit

$$\Delta(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} (\gamma_1(t_0 + \pi; \lambda, \mu) + \gamma_2'(t_0 + \pi; \lambda, \mu)) - \cos \pi \nu,$$

wo $\gamma_1(t; \lambda, \mu)$, $\gamma_2(t; \lambda, \mu)$ die Lösungen von (2μ) mit (3) sind. — Man hat die Gültigkeit von ②, wenn man

$$(\alpha) \quad \gamma(\lambda, \mu) = \gamma_1(t + \pi; \lambda, \mu) - e^{-i\pi \nu} \gamma_1(t; \lambda, \mu)$$

oder

$$(\beta) \quad \gamma(\lambda, \mu) = \gamma_2(t + \pi; \lambda, \mu) - e^{-\pi i \nu} \gamma_2(t; \lambda, \mu)$$

wählt, wobei jedoch (α) oder (β) ausscheiden, falls die rechte Seite für $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, \mu_0)$ in t identisch verschwindet. Letzteres kann offenbar nicht für beide Fälle gleichzeitig eintreten. Für $\gamma^*(\lambda, \mu)$ ist natürlich nur ν durch $-\nu$ zu ersetzen. — ③ ist erfüllt mit den Eigenwerten

$$(\nu + 2n)^2 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

und den Eigenlösungen

$$e^{i(v+2n)t}, \quad e^{-i(v+2n)t}$$

21, (13) ist im wesentlichen der Satz über die Entwickelbarkeit in Laurent-Reihen, und 21, (14) ist eine einfache Folgerung des zugehörigen Gutzmerschen Koeffizientensatzes. Oder man hat direkt:

$$\begin{aligned}
 e^{-i\nu t} f(t) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} e^{i2rt} \\
 &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} e^{-2r \operatorname{Im} t} e^{i2r \operatorname{Re} t}, \\
 \overline{e^{-i\nu t} f(t)} &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_{2r} e^{-2r \operatorname{Im} t} e^{-i2r \operatorname{Re} t}, \\
 (*) \quad &\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} |e^{-i\nu t} f(t)|^2 dt = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} |c_{2r}|^2 e^{-4r \operatorname{Im} t_0}, \\ (\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_0) \end{array} \right. \\
 &\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} |e^{-i\nu t} f(t)|^2 dt \leq \|e^{-i\nu t}\|_s^2 \|f\|_s^2 \quad (Q_{s1} \leq \operatorname{Im} t_0 \leq Q_{s2}), \\
 &(\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_0) \\
 &\|e^{i(v+2r)t}\|_s \leq \|e^{i\nu t}\|_s \begin{cases} e^{-2r Q_{s2}} & (r < 0) \\ e^{-2r Q_{s1}} & (r \geq 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Schreibt man daher (*) für $\operatorname{Im} t_0 = Q_{s1}$ und $\operatorname{Im} t_0 = Q_{s2}$ auf und addiert, so wird sicher

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} |c_{2r}|^2 \|e^{i(v+2r)t}\|_s^2 \leq 2 \|e^{i\nu t}\|_s^2 \|e^{-i\nu t}\|_s^2 \|f\|_s^2;$$

das ist 21, (10) mit $\alpha_s^2 = 2 \|e^{i\nu t}\|_s^2 \|e^{-i\nu t}\|_s^2$.

④ ist erfüllt wegen

$$\Delta(\lambda, 0) = \cos \sqrt{\lambda} \pi - \cos \nu \pi.$$

Für (5) beachte man, daß die allgemeine Lösung von 21, (15), bzw.

$$(+)\quad z''(t) + (\lambda + \mu g(t)) z(t) = f(t)$$

die Form

$$z(t) = z_0(t) + \eta_1 y_1(t) + \eta_2 y_2(t)$$

hat, wo etwa $z_0(t)$ die durch

$$z_0(t_0) = 0, \quad z'_0(t_0) = 0$$

bestimmte, in λ, μ ganz analytische Lösung von (+) ist und $y_1(t), y_2(t)$ die Lösungen von (2 μ), (3) sind. Die Gleichungen

$$(\times) \quad \begin{cases} z(t_0 + \pi) - e^{\pi i \nu} z(t_0) = 0 \\ z'(t_0 + \pi) - e^{\pi i \nu} z'(t_0) = 0 \end{cases}$$

sind dann lineare Gleichungen für η_1, η_2 , deren Determinante gerade

$$-2e^{\pi i \nu} \Delta(\lambda, \mu)$$

ist. Aus $(\times)$ und $(+)$ folgt aber wegen (1) und $f(t) \in \mathfrak{U}$ auch $z(t) \in \mathfrak{U}$. Damit gilt ⑤.

Für (2μ) , (5), (6) ist nun $\mu=1$ ein normaler Wert wegen der Voraussetzung von Satz 1, daß $\Delta_\nu(\lambda)$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Daher liefern zunächst 22, Satz 3 und Satz 3* die Aussage über die $\lambda_{\nu+2r}$, wenn man noch berücksichtigt, daß der Koeffizient von μ in der μ -Potenzreihe von $\lambda_n(\mu)$:

$$\begin{aligned} \lambda_{n1} &= -(G y_n, y_n^*) = -\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} g(t) e^{i(\nu+2r)t} e^{-i(\nu+2r)t} dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} g(t) dt \end{aligned}$$

ist.

Die Möglichkeit der Normierung des zugehörigen Systems der Eigenfunktionen zu einem Biorthogonalsystem ergibt 22, Satz 5.

Zum Beweise der asymptotischen Eigenschaft der Eigenfunktionen hat man nach 24, Satz 10

$$\| (y_n, y_n^*(\mu)) y_n(\mu) - y_n \|_s = \| y_n \|_s O_s \left(\frac{1}{n} \right) \quad (s=1, 2, 3, \dots)$$

auszuwerten. Dabei beachtet man, daß die entsprechende Abschätzung für ein $s=S$ zugleich auch für $s=1, 2, \dots, S-1$ gilt. Denn man hat, wie man oben erkennt, $\alpha_\sigma \leq \alpha_{\sigma+1}$, $\gamma_\sigma \leq \gamma_{\sigma+1}$; alles andere aber ist von $\mathfrak{N}_s$ ganz unabhängig. Weiter gilt nun, daß für

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau &= \varrho_{11} = \varrho_{12}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \tau \leq \pi \\ &\quad \frac{|e^{i(\nu+2r)\tau}|}{\|e^{i(\nu+2r)t}\|_1} \end{aligned}$$

zwischen positiven Schranken bleibt, die nur von ν abhängen. Es ist ja

$$\|e^{i(\nu+2r)t}\|_1 = |e^{i(\nu+2r)\tau_1}|$$

mit einem τ_1 , $\operatorname{Im} \tau_1 = \varrho_{11} = \varrho_{12}$, $0 \leq \operatorname{Re} \tau_1 \leq \pi$. Also wird der obige Quotient

$$|e^{i(\nu+2r)(\tau-\tau_1)}| = |e^{i\nu(\tau-\tau_1)}|$$

mit reellem $\tau - \tau_1$ zwischen $-\pi$ und π .

Somit kann geschrieben werden — zunächst für $\operatorname{Im} t = \varrho_{11} = \varrho_{12}$, damit aber wegen der Willkür der Wahl der $\varrho_{i,h}$ für alle t —

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)\tau} y_{\nu+2r}^*(\tau) d\tau \cdot y_{\nu+2r}(t) = e^{i(\nu+2r)t} \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right)$$

mit der entsprechenden Gleichmäßigkeit des $O(1/r)$. Durch Multiplikation und Integration folgt dann

$$\frac{1}{\pi} \int_{i_0}^{i_0+\pi} e^{i(v+2r)t} y_{v+2r}^*(t) dt \cdot \frac{1}{\pi} \int_{i_0}^{i_0+\pi} y_{v+2r}(t) e^{-i(v+2r)t} dt = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

und somit die Behauptung des Satzes.

Es bleibt der Beweis des Entwicklungssatzes. Daß

$$\sum_{|r| \leq k} c_{2r} y_{v+2r}(t) \rightarrow f(t) \quad (k \rightarrow \infty)$$

gleichmäßig in kompakten Teilgebieten gilt, ist Folge von 23, Satz 9; ebenso, daß dort gleichmäßig

$$c_{2r} y_{v+2r}(t) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \pm \infty).$$

Daher sind die Reihenglieder z. B. für

$$\varrho_{s1} \leq \operatorname{Im} t \leq \varrho_{s2}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} t \leq \pi$$

gleichmäßig beschränkt. Für $r \leq r_0 < 0$, $\operatorname{Im} t = \varrho_{s2}$,

$$\varrho_{s-1,1} \leq \operatorname{Im} \tau \leq \varrho_{s-1,2}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \tau = \operatorname{Re} t \leq \pi$$

wird weiter

$$\begin{aligned} \frac{y_{v+2r}(\tau)}{y_{v+2r}(t)} &= |e^{i(v+2r)(\tau-t)}| \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) \\ &\leq \operatorname{const} e^{2r(\varrho_{s2}-\varrho_{s-1,2})}; \\ |c_{2r} y_{v+2r}(\tau)| &\leq \operatorname{const} e^{2r(\varrho_{s2}-\varrho_{s-1,2})}. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für $r \geq r_0^* > 0$. Damit folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe in jedem kompakten Teilgebiet des Streifens. — Satz 1 ist damit vollständig bewiesen.

Ergänzend entnehmen wir 22, Satz 3 und Satz 3* und 24 noch den

Satz 2. Für jedes μ mit $|\mu| < 2$ bei höchstens endlich vielen Ausnahmen sind mit $\mu g(t)$ an Stelle von $g(t)$ die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Die zu $\mu g(t)$ entsprechend Satz 1 gehörenden Eigenwerte und Eigenlösungen seien $\lambda_{v+2r}(\mu)$, $y_{v+2r}(t, \mu)$, $y_{v+2r}^*(t, \mu)$.

Bei entsprechender Numerierung gelten für die Eigenwerte um $\mu=0$ Potenzreihenentwicklungen

$$\lambda_{v+2r}(\mu) = (v+2r)^2 - \frac{\mu}{\pi} \int_{i_0}^{i_0+\pi} g(t) dt + \mu^2 \lambda_{v+2r,2} + \mu^3 \lambda_{v+2r,3} + \dots$$

Es gibt positive Konstanten C , D , derart, daß für die Konvergenzradien ϱ_{v+2} , und die Koeffizienten

$$\varrho_{v+2r} \geq C(1+|r|), \quad |\lambda_{v+2r,k}| \leq D^k(1+|r|)^{-(k-1)}$$

gilt. Danach hat man speziell für $\mu=1$ bei $r \rightarrow \pm \infty$

$$\lambda_{v+2r} = (v+2r)^2 - \frac{1}{\pi} \int_{i_0}^{i_0+\pi} g(t) dt + \lambda_{v+2r,2} + \dots + \lambda_{v+2r,k} + O\left(\frac{1}{r^k}\right).$$

Für die Eigenlösungen hat man bei entsprechender Numerierung Potenzreihen um $\mu=0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)\tau} y_{\nu+2r}^*(\tau, \mu) d\tau \cdot y_{\nu+2r}(t, \mu) \\ = e^{i(\nu+2r)t} (1 + \mu y_{\nu+2r,1}(t) + \mu^2 y_{\nu+2r,2}(t) + \dots).$$

Sie sind für t in kompakten Teilgebieten von $\mathfrak{S}$ und μ in einem abgeschlossenen Gebiet $|\mu| \leq q < \hat{Q}_{\nu+2r}$ absolut gleichmäßig konvergent. Es gilt mit positiver Konstanten $\hat{C}$

$$\hat{Q}_{\nu+2r} \geq \hat{C} (1 + |r|)$$

und für t in abgeschlossenem Teilstreifen von $\mathfrak{S}$ mit positiver Konstante $\hat{D}$

$$|y_{\nu+2r,k}(t)| \leq \hat{D}^k (1 + |r|)^{-k}.$$

Daher hat man speziell für $\mu=1$ bei $r \rightarrow \pm\infty$ in abgeschlossenem Teilstreifen von $\mathfrak{S}$ gleichmäßig

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+\pi} e^{i(\nu+2r)\tau} y_{\nu+2r}^*(\tau) d\tau \cdot y_{\nu+2r}(t) \\ = e^{i(\nu+2r)t} \left(1 + y_{\nu+2r,1}(t) + \dots + y_{\nu+2r,k}(t) + O\left(\frac{1}{r^{k+1}}\right) \right).$$

Zur Begründung des letzten Teils des Satzes werden die letzten Überlegungen des Beweises von Satz 1 entsprechend herangezogen. Man bemerkt dazu, daß die Funktionen $y_{\nu+2r,k}(t)$ π -periodisch sind.

32. $g(t)$ GERADE; $\nu=0$ ODER $\nu=1$.

$g(t)$ sei in diesem Abschnitt als π -periodische Funktion angenommen, die in einem zur reellen Achse symmetrischen parallelen Streifen $\mathfrak{S}_0$ holomorph und gerade ($g(-t)=g(t)$) ist. $\mathfrak{S}$ sei irgendein Teilstreifen des Holomorphiestreifens $\mathfrak{S}_0$ von $g(t)$. $\mathfrak{S}$ braucht nicht zur reellen Achse symmetrisch zu sein, ja nicht einmal diese zu enthalten.

Die Lösungen der Hillschen Differentialgleichung (2) — natürlich in $\mathfrak{S}_0$ holomorph — mit den Anfangsbedingungen (3) seien jetzt speziell zu $t_0=0$ gewählt. Man hat dann bekanntlich¹⁷⁾

$$(7) \quad y_1(\pi) = y_2'(\pi).$$

Man erkennt ferner, daß eine nichttriviale 2π -periodische Lösung

$$(8) \quad y(t) = y(t+2\pi) \neq 0$$

von (2) genau dann existiert, wenn entweder $\nu=0$, d.h. $y_1(\pi)=1$, oder $\nu=1$, d.h. $y_1(\pi)=-1$. Da mit $y(t)$ auch $y(-t)$ Lösung ist, existiert mit einer 2π -periodischen Lösung stets auch entweder eine gerade oder eine ungerade

¹⁷⁾ Vgl. z.B. den in diesem allgemeinen Falle gültigen Beweis von MS, 2.12, Satz 4, S. 99.

2π -periodische Lösung. Dazu kann man die Gleichungen¹⁸⁾

$$(9) \quad \begin{cases} y_1(\pi) + 1 = 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right), & y_1(\pi) - 1 = 2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_1'(\pi) = 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right), & y_2(\pi) = 2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

heranziehen. Sie zeigen u.a., daß eine Lösung von (2) mit

$$(8_1) \quad y(t) - y(-t) = y(t + 2\pi) \pm 0$$

genau dann existiert, wenn

$$(10_1) \quad y_1'(\pi) = 0,$$

und eine mit

$$(8_2) \quad y(t) = -y(-t) = y(t + 2\pi) \mp 0$$

genau dann, wenn

$$(10_2) \quad y_2(\pi) = 0.$$

Unser Ziel ist nun der dem Satz 1 weitgehend entsprechende

Satz 3. Die ganzen Funktionen $y_1'(\pi; \lambda)$ und $y_2(\pi; \lambda)$ mögen je keine mehrfachen Nullstellen besitzen.

Dann hat das Eigenwertproblem (2), (8) abzählbar unendlich viele Eigenwerte — entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt — λ_n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Davon sind λ_n ($n=0, 1, 2, \dots$) die verschiedenen Nullstellen von $y_1'(\pi; \lambda)$ und λ_n ($n=-1, -2, -3, \dots$) die verschiedenen Nullstellen von $y_2(\pi; \lambda)$. Sie lassen sich so numerieren, daß

$$\lambda_n = n^2 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

gilt.

Diese und die zugehörigen Eigenlösungen $y_n(t)$ lassen sich so wählen, daß $y_n(t)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) die Eigenlösungen von (2), (8₁) und $y_n(t)$ ($n=-1, -2, -3, \dots$) die von (2), (8₂) — und zwar in jedem dieser Fälle für gerades n die mit $y(t+\pi) = y(t)$ und für ungerades n die mit $y(t+\pi) = -y(t)$ — sind. Sie können so normiert werden, daß die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y_n(t) y_m(t) dt = \delta_{nm} \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

gelten. Für $n \rightarrow +\infty$ hat man dann

$$y_n(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y_n(\tau) \cos n\tau d\tau \cdot \left[\cos nt \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \sin nt \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

und

$$y_{-n}(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y_{-n}(\tau) \sin n\tau d\tau \cdot \left[\sin nt \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \cos nt \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

und zwar beides gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}_0$.

¹⁸⁾ Vgl. z.B. den in diesem allgemeinen Falle gültigen Beweis von MS, 2.12, Satz 5, S. 99.

Ist der Teilstreifen $\mathfrak{S}$ symmetrisch zur reellen Achse, so läßt sich jede dort holomorphe 2π -periodische Funktion $f(t)$ in der Form

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(t) + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n y_n(t)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) y_n(t) dt$$

entwickeln. Die Reihen sind in jedem abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}$ absolut gleichmäßig konvergent.

Ist dagegen $\mathfrak{S}$ nicht symmetrisch zur reellen Achse, so läßt sich jede dort holomorphe 2π -periodische Funktion $f(t)$ in die Reihe

$$f(t) = a_0 y_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n y_n(t) + a_{-n} y_{-n}(t))$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi} f(t) y_n(t) dt, \quad t_0 \in \mathfrak{S}$$

entwickeln. Die Reihe ist in jedem abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}$ absolut gleichmäßig konvergent.

Zum Inhalt des Satzes bemerken wir, daß man aus ihm in gewohnter Weise die entsprechende Aussage über die beiden Eigenwertprobleme $y(t+\pi) = y(t) \neq 0$ und $y(t+\pi) = -y(t) \neq 0$ oder bzw. und die Zerlegung bezüglich gerader und ungerader Funktionen entnehmen kann. Dazu wird man zweckmäßig (9) heranziehen.

Der Beweis von Satz 3 wird wieder durch Zurückführung auf die Theorie von Abschnitt 2 erhalten.

Wir zeigen zunächst, daß für jedes der vier Eigenwertprobleme (2 μ) mit bzw.

$$(11_1) \quad y(t+\pi) = y(t) = y(-t) \neq 0,$$

$$(11_2) \quad y(t+\pi) = y(t) = -y(-t) \neq 0,$$

$$(11_3) \quad y(t+\pi) = -y(t) = -y(-t) \neq 0,$$

$$(11_4) \quad y(t+\pi) = -y(t) = y(-t) \neq 0$$

die Voraussetzungen von 21 erfüllbar sind. Man wird $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, ... zum Streifen $\mathfrak{S}_0$ wie in 31 bilden, so daß 21, (1), (2), (3) gegeben sind. $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ wird hier die Gesamtheit der Funktionen von $\mathfrak{H}$ mit (11 $_1$) bzw. ... (11 $_4$). Man setzt

$$(u, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(t) v(t) dt,$$

so daß wieder (4) mit $\kappa=1$ gilt.

F und G werden wie in 31 erklärt und erfüllen wie dort 21, (5) bis (8).

21, $\mathfrak{U}$ ist erfüllt — man beachte Formeln (9) dieses Abschnitts — mit $A(\lambda, \mu) = y_1' \left(\frac{\pi}{2}; \lambda, \mu \right)$ bzw. $= y_2 \left(\frac{\pi}{2}; \lambda, \mu \right)$ bzw. $y_1 \left(\frac{\pi}{2}; \lambda, \mu \right)$ bzw. $y_2' \left(\frac{\pi}{2}; \lambda, \mu \right)$. Die Gültigkeit von $\mathfrak{z}$ hat man mit $y(\lambda, \mu) = y_1(t; \lambda, \mu)$ in den Fällen (11₁), (11₃) und mit $y(\lambda, \mu) = y_2(t; \lambda, \mu)$ bei (11₂) und (11₄). Die Eigenwerte und Eigenlösungen zu $\mu = 0$ sind

$$4n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad 1, \sqrt{2} \cos 2n t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

bzw.

$$4(n+1)^2; \quad \sqrt{2} \sin 2(n+1) t \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bzw.

$$(2n+1)^2; \quad \sqrt{2} \cos(2n+1) t \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bzw.

$$(2n+1)^2; \quad \sqrt{2} \sin(2n+1) t \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Schließlich werden **21**, (13), (14) sowie $\mathfrak{4}$ und $\mathfrak{5}$ ganz analog wie in **31** bestätigt. Auf die Durchführung im einzelnen kann wohl verzichtet werden.

Hiermit folgen die Behauptungen von Satz 3, abgesehen nur vom letzten Absatz, ganz ähnlich wie in **31**. Zusätzlich ist zunächst

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(t) \cos^2 n t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(t) \, dt + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

zu beachten, was mit $\cos^2 n t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2n t)$ und partieller Integration für jedes natürliche k sofort ersichtlich ist. Damit liefern **22**, Satz 3 und Satz 3* die Aussage über die Eigenwerte. **23**, Satz 4 ergibt die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen. Für die Asymptotik der Eigenlösungen verwendet man wieder **24**, Satz 10 zusammen mit den oben beim Beweise von Satz 1 gemachten Bemerkungen. Man hat danach z.B.

$$\|(\cos 2n t, y_{2n}(t)) y_{2n}(t) - \cos 2n t\|_1 = \|\cos 2n t\|_1 O\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n \rightarrow +\infty$, wobei $\|f\|_1$ das Maximum der π -periodischen Funktion $f(t)$ auf einer zur reellen Achse parallelen Geraden innerhalb $\mathfrak{S}_0$ bedeutet und das $O(1/n)$ gleichmäßig innerhalb eines abgeschlossenen Teilstreifens von $\mathfrak{S}_0$ gilt. Man beachtet nun noch, daß für τ auf der genannten Geraden gleichmäßig

$$\|\cos 2n t\|_1 = \cos 2n \tau \cdot O(1) + \sin 2n \tau \cdot O(1)$$

gilt. Dann erhält man leicht die gesuchten Formeln.

Der Entwicklungssatz für symmetrisches $\mathfrak{S}$ läßt sich für jedes unserer vier Teilprobleme (2) mit (11₁) bzw. ... (11₄) aus **23**, Satz 9 hier unmittelbar entnehmen. Im Satz 3 ist sogleich die Zusammenfassung, die den vier Teilaussagen äquivalent ist, notiert worden.

Es bleibt nun der Beweis der abgeschwächten Entwicklungsaussage des letzten Absatzes von Satz 3 für den Fall des nicht symmetrischen Streifens. Hier wird die Überlegung von **26** angewandt.

$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots$ seien wie oben, jedoch hier bezüglich $\mathfrak{S}$, definiert. $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ ist der Unterraum der 2π -periodischen Funktionen. Die Annahmen von **21** bis einschließlich (8) sind offensichtlich mit

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi} u(t) v(t) dt$$

und den wie oben definierten F, G erfüllt. Wir bezeichnen nun mit $\hat{\mathfrak{S}}$ den kleinsten offenen zur reellen Achse symmetrischen Streifen, der $\mathfrak{S}$ enthält. $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ seien die Unterräume der in $\hat{\mathfrak{S}}$ holomorphen 2π -periodischen geraden bzw. ungeraden Funktionen. Diese sind in $\mathfrak{R}$ perfekt. Denn sind z. B. $f_m(t)$ Funktionen aus $\mathfrak{U}_1$, die innerhalb jedes abgeschlossenen Teilstreifens von $\mathfrak{S}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(t)$ (aus $\mathfrak{U}$) konvergieren, so läßt sich $f(t)$ aus $\mathfrak{S}$ in $\hat{\mathfrak{S}}$ (eindeutig) fortsetzen, und man hat $f(t) \in \mathfrak{U}_1$. Man hat nämlich in $\mathfrak{S}$ eine Entwicklung

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n t}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi} f(t) e^{-i n t} dt.$$

Daher gilt für $m \rightarrow \infty$

$$c_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi} f_m(t) e^{-i n t} dt \rightarrow c_n.$$

Andererseits hat man wegen $f_m(t) \in \mathfrak{U}_1$

$$c_{m, -n} = c_{m, n}.$$

Dann gilt aber auch

$$c_{-n} = c_n;$$

also ist die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n t}$$

sogar in $\hat{\mathfrak{S}}$ konvergent, und es gilt $f(t) \in \mathfrak{U}_1$. Die wechselseitige Orthogonalität (*) in **26** von $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ ist offensichtlich. Die Eigenschaften von **21** bis einschließlich (8) sind auch für $\mathfrak{U}_1$ oder $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U}$ erfüllt.

Für (24) mit (8₁) bzw. (8₂) sind nach den vorangehenden Überlegungen zum Beweise der ersten Aussagen von Satz 3 die Voraussetzungen ① bis ⑤ von **21** erfüllt, und zwar mit den in **26** notierten Angaben über die Eigenwerte zu $\mu = 0$.

Schließlich ist die abgeschwächte Entwicklungsaussage (a), (b) von **26** durch die in $\mathfrak{S}$ gültige Entwicklung

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n t}$$

bei Zusammenfassung der Glieder mit n und $-n$ gegeben. (b) wird ähnlich wie in 31 bewiesen.

Damit ist auf unser Problem 26, Satz 11 anwendbar, was sofort die letzte Aussage von Satz 3 ergibt.

Die zu Satz 2 analogen asymptotischen Aussagen können ohne Modifikation direkt durch Anwendung von 24 auf die Probleme (2μ) mit (11_1) bzw. ... (11_4) erhalten werden:

Satz 4. Für jedes μ mit $|\mu| < 2$ bei höchstens endlich vielen Ausnahmen sind mit $\mu g(t)$ an Stelle von $g(t)$ die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Die zu $\mu g(t)$ entsprechend Satz 3 gehörenden Eigenwerte und Eigenlösungen seien $\lambda_n(\mu)$, $y_n(t, \mu)$.

Bei entsprechender Numerierung gelten für die Eigenwerte um $\mu=0$ Potenzreihenentwicklungen

$$\lambda_n(\mu) = n^2 + \lambda_{n1}\mu + \lambda_{n2}\mu^2 + \dots \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Es gibt positive Konstanten C, D , derart, daß für die Konvergenzradien ϱ_n und die Koeffizienten

$$\varrho_n \geq C(1 + |n|), \quad |\lambda_{nk}| \leq D^k(1 + |n|)^{-(k-1)}$$

gilt. Danach hat man speziell für $\mu=1$ bei $n \rightarrow \infty$

$$\lambda_n = n^2 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(t) dt + \lambda_{n2} + \dots + \lambda_{nk} + O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Für die Eigenlösungen hat man bei entsprechender Numerierung Potenzreihen um $\mu=0$, z. B. für $n=1, 2, 3, \dots$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos n\tau y_n(\tau, \mu) d\tau y_n(t, \mu) = \cos nt + \mu y_{n1}(t) + \mu^2 y_{n2}(t) + \dots,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin n\tau y_{-n}(\tau, \mu) d\tau y_{-n}(t, \mu) = \sin nt + \mu y_{-n,1}(t) + \mu^2 y_{-n,2}(t) + \dots.$$

Sie sind für t in abgeschlossenem Teilstreifen von $\mathfrak{S}_0$ und $|\mu| \leq q < \hat{\varrho}_n$ bzw. $|\mu| \leq q < \hat{\varrho}_{-n}$ absolut gleichmäßig konvergent. Man hat mit positiver Konstante $\hat{C}$

$$\hat{\varrho}_n \geq \hat{C}(1 + |n|) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

und für t in abgeschlossenem Teilstreifen gleichmäßig

$$|y_{nk}(t)| \leq |\cos nt| \hat{D}_1^k(1 + |n|)^{-k} + |\sin nt| \hat{D}_2^k(1 + |n|)^{-k}$$

mit positiven Konstanten $\hat{D}_1, \hat{D}_2$. Daher hat man speziell für $\mu=1$ bei $n \rightarrow \infty$ in abgeschlossenen Teilstreifen von $\mathfrak{S}_0$ gleichmäßig

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos n \tau y_n(\tau) d\tau y_n(t) \\ = \cos n t \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \right) + y_{n,1}(t) + \cdots + y_{n,k}(t) + \sin n t \cdot O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin n \tau y_{-n}(\tau) d\tau y_{-n}(t) \\ = \sin n t \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \right) + y_{-n,1}(t) + \cdots + y_{-n,k}(t) + \cos n t \cdot O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

Zum Beweise sind neben 24 einige Bemerkungen des Beweises von Satz 3 heranzuziehen.

32. BEMERKUNG ÜBER DEN FALL: ν GANZ, $g(t)$ NICHT GERADE.

Hier ist das System der Eigenlösungen in gewissen Fällen zu keinem Werte $\mu \neq 0$ vollständig, so daß ein voll analoger Entwicklungssatz nicht gilt. Als einfachstes Beispiel mag dienen

$$y''(t) + (\lambda - \mu e^{2it}) y(t) = 0.$$

Diese Differentialgleichung entsteht mit $z = e^{it}$ aus der Besselschen Differentialgleichung

$$z(z u'(z))' + (\mu z^2 - \lambda) u(z) = 0.$$

Die 2π -periodischen Eigenwerte und Eigenlösungen sind

$$\lambda = n^2, \quad y(t) = J_n(\sqrt{\mu} e^{it}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Sie reichen, da $J_n(\sqrt{\mu} z)$ nur nicht-negative Potenzen von z enthält, offenbar nicht aus, um jede in einem Streifen parallel der reellen Achse holomorphe 2π -periodische Funktion $f(t)$ darzustellen.

Eine genauere Untersuchung gerade dieses Beispiels der Besselschen Differentialgleichung, insbesondere auch im Falle ν ganz, findet man im Abschnitt 4 im zweiten Teil dieser Arbeit.

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Köln

(Eingegangen am 29. Februar 1960)



Vor kurzem erschien :

Die zahlenmäßige Entwicklung des Hochschulbesuches in den letzten fünfzig Jahren

Von Dr. rer. pol. CÄCILIE QUETSCH,

Siemens-Schuckertwerke AG

Mit 11 Bildern und 15 Tabellen. VIII, 56 Seiten Gr.-8°. 1960. Steif geheftet DM 7,50

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung · Der Hochschulbesuch seit dem Studienjahr 1908/09 bis 1957/58: Die Entwicklung in absoluten und relativen Zahlen. Ein Vergleich mit früheren Jahrhunderten. Die Entwicklung bei anderen Nationen. Das Frauenstudium · Die wichtigsten Einflüsse auf den Hochschulbesuch: Die Abhängigkeit von der Bevölkerungsstruktur. Der Einfluß von Wirtschaft und Politik. Die Auswirkungen der Studienordnungen · Die zukünftige Entwicklung · Tabellen · Schrifttumsverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Die vorliegende Arbeit wurde von Dr. H. GOESCHEL, Vorstandsmitglied der Siemens-Schuckertwerke AG und Mitglied des Wissenschaftsrates, aus der Sorge um den naturwissenschaftlichen und technischen Nachwuchs angeregt und ermöglicht. Die breitere Themenstellung, die die Entwicklung des Hochschulbesuches aller Fakultäten über einen längeren Zeitraum einschließt, ergab sich aus der Erkenntnis, daß die Frage des Nachwuchses an Physikern, Chemikern und Ingenieuren nicht unabhängig von der Entwicklung in den übrigen Fakultäten und nicht allein aus der gegenwärtigen Situation beurteilt werden kann. Bei der Analyse der zusammengestellten Zahlen zeigte sich schon bald, daß jede Einflußnahme auf den Hochschulbesuch — ob sie nun durch Kriege ausgelöst wurde oder das Ergebnis hochschulpolitischer Konzeptionen und Eingriffe war — in den letzten Jahrzehnten die kontinuierliche Entwicklung erheblich störte. Das im Grundgesetz verankerte Recht auf freie Wahl von Beruf und Ausbildungsstätte verbürgt nicht nur die Freiheit des einzelnen, sondern gewährleistet zweifellos auch die beste Versorgung der Gemeinschaft mit den zu ihrer Erhaltung und Fortentwicklung notwendigen Fachkräften. Dem derzeit noch an den meisten technischen und naturwissenschaftlichen Fakultäten wegen der fehlenden Arbeitsplätze eingeführten „*numerus clausus*“ wohnt dagegen die Tendenz inne, den Zustrom an Studierenden zugunsten anderer Fakultäten zu verringern. Eine solche Entwicklung dürfte auch im Interesse der geisteswissenschaftlichen Disziplinen unerwünscht sein.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG



Vor kurzem erschien :

Plane Elastic Systems

By Professor L. M. MILNE-THOMSON, C.B.E.

Mathematics Research Center, United States Army, The University of Wisconsin,
Madison, Wis./USA

(Ergebnisse der angewandten Mathematik, Heft 6)

Mit 76 Textabbildungen. VIII, 211 Seiten Gr.-8°. 1960. In englischer Sprache.
Steif geheftet DM 49,80

CONTENTS

The role of Airy's stress function · Complex stresses and their properties in the isotropic case · Mathematical preliminaries to the boundary value problems · Planes and half-planes · Circular Boundaries · Curvilinear boundaries · The influence of anisotropy · References · Index.

The threefold aim of the book is (i) to state clearly what problem is under discussion, (ii) to approach the boundary value problem directly rather than by inverse or guessing methods, (iii) to provide the proper mathematical tools. In particular the necessary parts of the theory of functions of a complex variable are given in Chapter III so that in this respect the book is reasonably self-contained. Although the treatment takes a theoretical form, it is directly adapted to practical physical and engineering applications. The last chapter on the influence of anisotropy will, it is hoped, show that the principal effect of this phenomenon is one of arithmetical rather than of theoretical complication, and indeed in these days of efficient computing machines arithmetical complication can be largely discounted. Each chapter is followed by a set of examples, there are 150 in all, which in many cases point to problems otherwise untreated in the text.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG